2010年度 第7回の整数論セミナー

日時： 2010 年 6 月 4 日 (金)

講演者： 太田 香 (津田塾大学)

タイトル： 標数 0 の局所体の分岐ゼータ関数について

アブストラクト：

$\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体 K に対して，その分岐に関連する 2 種類のゼータ関数を定義する．まず最初に，K の任意の有限次拡大 L に対して，積分 $J(L/K)$ を定義する．これは，距離の比 $|a-a'|/|a-a_1|$ を，L/K の整の生成元全体上で積分したものである．ここで，a' は a に最も近い a の K 上の共役で，a_1 は K 上の次数が a より小さい元のうち a に最も近いもので，測度は L の整数環上で 1 をとる L の Haar 測度とする．この比は常に 1 以下となるので，$J(L/K)$ は 0 より大きく 1 以下の値をとり，$J(L/K)=1$ であることと，L/K が tamely ramified とが同値であることがわかっている．従って，$J(L/K)$ は分岐の wildness を測るものである．

そして，K の全分岐ゼータ関数 $TZ_K(s)$ および分岐ゼータ関数 $RZ_K(s)$ を，n 番目の係数 a_n, b_nが，それぞれ

$$
\begin{aligned}
a_n &= (K \text{ のすべての } n \text{ 次拡大体 } L \text{ についての } J(L/K) \text{ の平均}) \\
b_n &= (K \text{ のすべての } n \text{ 次完全分岐拡大体 } L \text{ についての } J(L/K) \text{ の平均})
\end{aligned}
$$

であるディリクレ級数として定義する．この定義から $TZ_K(s)$ と $RZ_K(s)$ はリーマンゼータ関数に上からおさえられるため，$\mathrm{Re}(s)>1$ で絶対広義一様収束しそこで解析関数となる．

最後に，これらのゼータ関数の係数のうち a_p と b_p(K は任意) および b_{pr}($K=\mathbb{Q}_p$ で r が p より小さい素数) の値を与える．