§1 Motivation

k_0 : 有限次代数体　　　　K : 1変数関数体 $/\mathbb{F}_q$

"k_∞" $/ k_0$　　　　定数拡大 $K\overline{\mathbb{F}}_q / K$:

- unramified
- $\mathrm{Gal}(K\overline{\mathbb{F}}_q / K) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$
- 〃 : gen. by Frob.

k_∞ の候補 1 (classical)

$$k_\infty = k_0(\mu_n ; {}^\forall n \geq 1)$$

$$k_\infty = k_0(\mu_{p^n} ; {}^\forall n \geq 1) \quad (p : \text{fixed prime})$$

k_∞ の候補 2 (new?)

$$k_\infty = k_0(\mu_\ell ; {}^\forall \ell : \text{prime})$$

(Fact : $\overline{\mathbb{F}}_q = \mathbb{F}_q(\mu_\ell : {}^\forall \ell : \text{prime})$)

v : k_0 の有限(p-)素点 (1つ決める)

F : k_∞/k_0 での v の惰性体

F_D : 〃 〃 分解体

$G = \mathrm{Gal}(F/F_D)$

$$\begin{tikzcd}
k_\infty \arrow[d, dash, "\text{finite}"] \\
F \arrow[d, dash, "G"] \\
F_D \arrow[d, dash] \\
k_0
\end{tikzcd}$$

G : gen. by Frob_v

$\simeq \hat{\mathbb{Z}}$ (特に torsion-free)

$\Rightarrow F/F_D$: unramified

$\Rightarrow F_D/k_0$: 殆どすべての k_0 の ℓ-素点の分岐指数は $\ell-1$

§2 主結果

以下 $k_0 = \mathbb{Q}$ とする

M_p^{ab}/F : maximal pro-p abel extension unramified outside p

M_p/F : maximal pro-p extension unramified outside p

$$F_D \underbrace{\subset}_{G} F \subset M_p^{ab} \subset M_p$$

$\mathrm{Gal}(M_p^{ab}/F)$: $\mathbb{Z}_p[[G]]$-module

主結果(I)

$$\mathrm{Gal}(M_p^{ab}/F) \simeq \prod_{N=1}^{\infty} \mathbb{Z}_p[[G]]$$

主結果(II)

$\mathrm{Gal}(M_p/F_D)$: projective prof. gp.

(III) $\forall m, n \geq 1$

$$\mathrm{Gal}(M_p^{ab}/F) \overset{\exists}{\twoheadrightarrow} \mathbb{F}_p[G_n]^{\oplus m}$$

G_n : unique quot. of G s.t. $|G_n| = n$

$\mathbb{F}_p[G_n]$: $\mathbb{Z}_p[[G]]$-module

via $G \twoheadrightarrow G_n$

(II) + (III) $\Rightarrow$ (I)

$\prod_{N=1}^{\infty} \mathbb{Z}_p[[G]]$ の"特徴付け"

Iwasawa の Th. の作用域付 version

以下 (II) について

Recall X : profinite group

X : <u>projective</u>

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

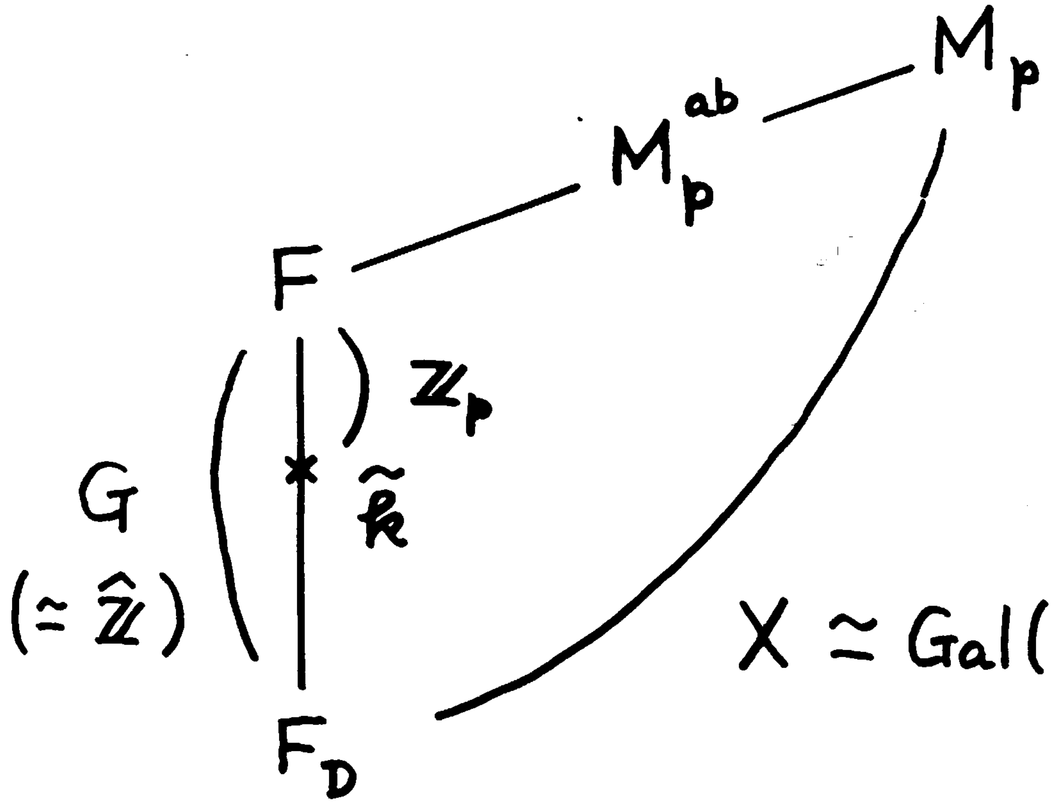
$$\forall \quad \begin{tikzcd} & & & X \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\forall\varphi"] & \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r, "\alpha"] & C \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

profinite group の短完全列

$\exists \psi : X \longrightarrow B$ s.t. $\alpha\psi = \varphi$

Fact X : projective

$\Longleftrightarrow {}^{\forall}\ell$: 素数 X の ℓ-Sylow subgroup が free pro-ℓ gp.



$$X \simeq \mathrm{Gal}(M_p/F) \rtimes \hat{\mathbb{Z}}$$

$$X \text{ の } \ell\text{-Sylow subgp} \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_\ell & \cdots \ell \neq p \\ \mathrm{Gal}(M_p/\tilde{k}) & \cdots \ell = p \end{cases}$$

従って 主結果(II) は 次と同値

<u>Th.</u> $\mathrm{Gal}(M_p/\tilde{k})$: free pro-p gp.

i.e. $H^2(\mathrm{Gal}(M_p/\tilde{k}) ; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \{0\}$

<u>注意</u> M_p : $\tilde{k}$ 上でも max. pro-p ext.

unram. outside p

§3 Pro-p extension with restricted ramification の研究

Shafarevich. Koch. O. Neumann, $\cdots$

k : 有限次代数体

$S = \{ k$ の p-素点 , ∞ 素点 $\}$

(p : 素数 (1つ決める))

k_S / k : maximal Galois extension unramified outside S

$$\mathrm{Gal}(k_S/k) = G_S$$

$k_S(p)/k$: maximal pro-p extension unramified outside S

$$\mathrm{Gal}(k_S(p)/k) = G_S(p)$$

$\dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} H^1(G_S(p); \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$: $G_S(p)$ の最小生成元の個数

☆ $\dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} H^2(G_S(p); \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$: 〃 関係式の最小個数

Localization map

v : kの素点

$$k_S \underset{\varphi}{\hookrightarrow} \bar{k}_v \quad \cdots\to \mathrm{Gal}(\bar{k}_v/k_v) \xrightarrow{\text{res.}} G_S$$

$$(= G_{k_v})$$

$$\cdots\to H^2(G_S : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^2(G_v : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

- indep. of φ
- $v \notin S$ なら 0-map

$\cdots\to$

$$\rho_k : H^2(G_S : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S} H^2(G_{k_\mathfrak{p}} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

localization map

$$H^2(G_S(p) : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \underset{\text{inflation}}{\xrightarrow{\sim}} H^2(G_S : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

(O. Neumann)

$$\left.\begin{array}{l} H^2(G_{k_\mathfrak{p}} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \{0\} \quad {}^\forall \mathfrak{p} \in S \\ \mathrm{Ker}\,\rho_k = \{0\} \end{array}\right] \Rightarrow G_S(p) : \text{free pro-}p\text{ gp.}$$

(1) $H^2(G_{k_\mathfrak{p}} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \{0\}$

$\Longleftrightarrow$ $H^0(G_{k_\mathfrak{p}} : \mu_p) = \{0\}$
duality

$\Longleftrightarrow$ $\mu_p \cap k_\mathfrak{p}^\times = \{1\}$

(2) $\mathrm{Ker}\,\rho_k = \{0\}$

$\Longleftrightarrow$ (weak) solution を持つ ${}^\forall$embedding problem

$$\begin{tikzcd} & & & \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "\varphi\ :\ \underline{G_S\text{を経由}}"] & \\ 1 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] & E \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

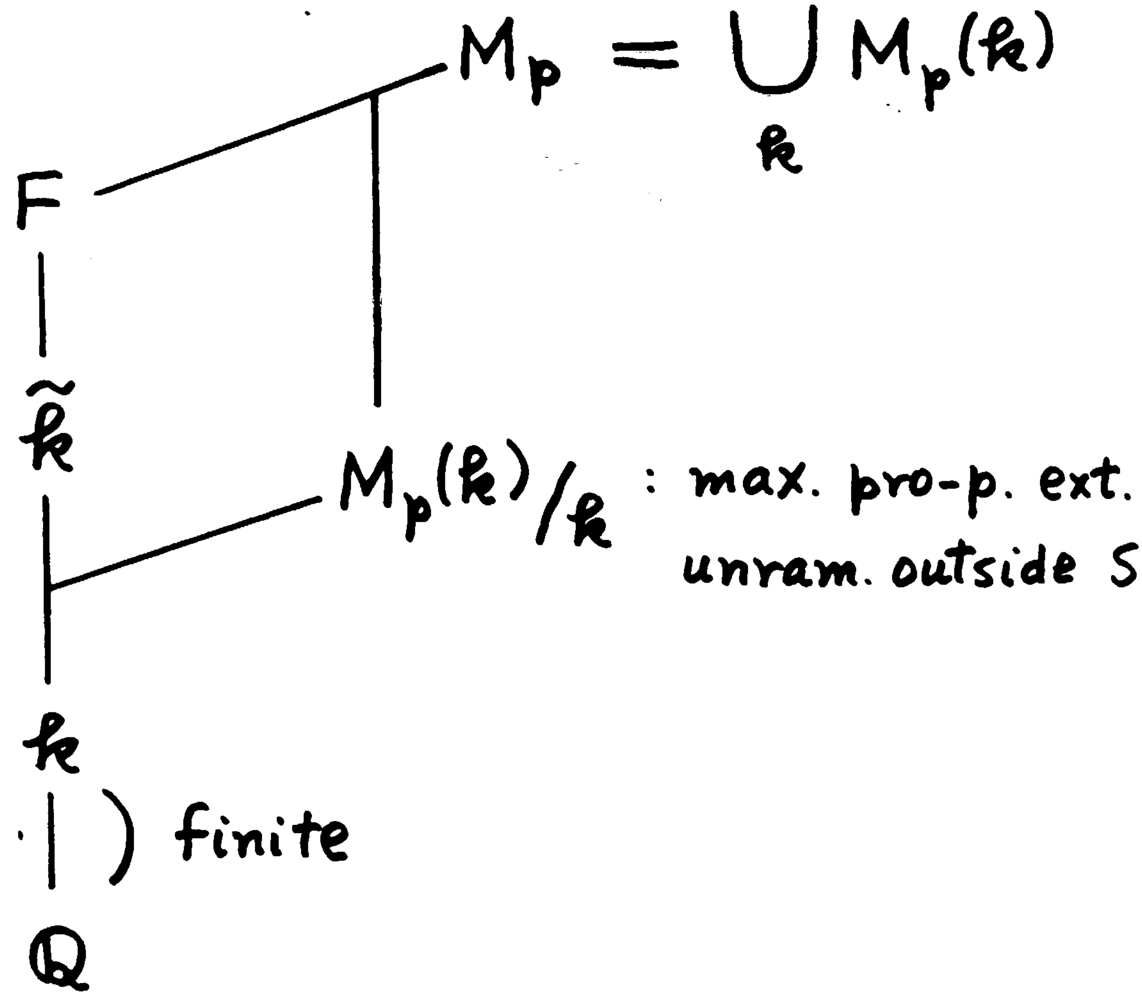
exact seq. of finite gps

は $\underline{G_S\text{を経由}}$する (weak) solution を持つ

(Neukirch)

§4 Th. の証明

4-1 embedding problem への帰着



(1) $\varinjlim H^2(G_{k_\mathfrak{q}} ; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \{0\} \quad {}^\forall \mathfrak{q} \in S$

$(\Rightarrow \varinjlim \operatorname{Im} \rho_k = \{0\})$

(2) $\varinjlim \operatorname{Ker} \rho_k = \{0\}$

を示せば $H^2(\mathrm{Gal}(M_p/\tilde{k}) ; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \{0\}$

が従う

(1) :　p : $F/\mathbb{Q}$ で unram.

$\Rightarrow \mu_p \cap k_{\mathfrak{p}}^{\times} = \{1\}$　　O.K.

(2) :　Neumann の結果（及びその一般化）

$$H^2(G_S(p) : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(G_S : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

$$H^2(G_k(p) : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(G_k : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

及び Neukirch の結果を用いて

「(weak) solution を持つ $^\forall$emb. problem

$$\begin{tikzcd}
 & & & G_{\tilde{k}}(p) \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\varphi : \mathrm{Gal}(M/\tilde{k}) \text{ を経由}"] & & \\
1 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] & E \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 & (*)
\end{tikzcd}$$

exact seq. of <u>finite p-gps</u>

は $\mathrm{Gal}(M/\tilde{k})$ を経由する (weak) solution

を持つ」を示せばよい

<u>注意</u>　(*) は non-split としてよい

proper solution のみ考えればよい

4-2 Galois 理論

$\mu_p \subset \tilde{k}$ と仮定して示せば十分

（安田正大氏（RIMS）による注意）

$\operatorname{Ker}\varphi \longleftrightarrow k_\varphi$, $\operatorname{Ker}\psi \longleftrightarrow k_\psi$

$$\begin{tikzcd} k_\psi \arrow[d, dash, "\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}"'] \\ k_\varphi \arrow[d, dash, "\text{unram. outside } p"'] \\ \tilde{k} \arrow[uu, dash, bend right, "E"'] \end{tikzcd}$$

E : central ext. of $G = \operatorname{Gal}(k_\varphi/\tilde{k})$

$k_\psi = k_\varphi(\sqrt[p]{\mu}) \quad \exists \mu \in k_\varphi^\times \setminus (k_\varphi^\times)^p$

- $\mu^\sigma \equiv \mu \mod (k_\varphi^\times)^p \quad \forall \sigma \in G$
- $k_\varphi(\sqrt[p]{\mu a}) \quad (\forall a \in \tilde{k} \text{ s.t } \mu a \notin (k_\varphi^\times)^p)$

  も emb. prob. の solution を与える

4-3 数論的部分

$k_\varphi(\sqrt[p]{\mu a})/k_\varphi$: unram. outside p

なる $a \in \hat{k}$ の存在を示せばよい

$(k_\psi/k_\varphi/\tilde{k}) = (*/*/*)\cdot\tilde{k}$

$*$: 有限次代数体
…(同じ文字)$'$

$$\begin{cases} k'_\varphi/\tilde{k}' : \text{unram. outside } p \\ \mu^\sigma \equiv \mu \mod (k'^{\times}_\varphi)^p \quad \forall\sigma \in Gal(k'_\varphi/\tilde{k}') \end{cases}$$

$\Rightarrow (\mu) = \mathfrak{m}\mathfrak{b}\mathfrak{a}^p$ 　$\mathfrak{m}$: pと素な$\tilde{k}'$のideal

$\mathfrak{b}$: pを割るk'_φのidealのべき積

$\mathfrak{a}$: k'_φのideal

$^\exists\mathfrak{q}$: $\tilde{k}'$の1次のprime s.t. $\mathfrak{q} \sim \mathfrak{m}$
同じ類

(密度定理)

i.e. $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}(a)$
$(a \in \tilde{k}')$

$q = \mathfrak{q} \cap \mathbb{Q}$ $(\equiv 1 \mod p)$

$k'_\varphi(\sqrt[p]{\mu a})/k'_\varphi$: unram. outside $\{p, \mathfrak{q}\}$

$\mathfrak{q}$ の ram. index は p

<u>Recall</u> $\tilde{k}/\mathbb{Q}$: すべての $\ell\,(\neq p)$ の ram. index は $\ell-1$

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{k} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "\substack{\text{ram.ind}\\ q-1}"'] & k_\varphi \arrow[d, dash] & \\
\tilde{k}' \arrow[r, dash, "\text{unram.}"'] \arrow[d, dash, "\mathfrak{q}"'] & k'_\varphi \arrow[r, dash, "\substack{\text{ram.ind.}\\ p}"'] & k'_\varphi(\sqrt[p]{\mu a}) \\
\mathbb{Q} & &
\end{tikzcd}
$$

$p \mid (q-1) \Rightarrow \tilde{k}'$ を ($\tilde{k}$ 内の) fin. ext. で
取り換えると
$k'_\varphi(\sqrt[p]{\mu a})/k'_\varphi$: unram. outside p
(Abhyanker's lemma)