Somos 4 数列の付値と楕円曲線上の局所高さ

内田幸寛

2010 年 4 月 23 日

概要

4 以上の自然数 k に対し，Somos k 数列とは，ある双線形漸化式と k 個の初期値で定義される数列である．例えば，楕円曲線の等分多項式から定まる elliptic divisibility sequence (EDS) は Somos 4 数列である．代数体上定義された EDS の付値の漸近挙動についてはすでにいくつかの結果が知られており，Somos 4 数列についても， Archimedes 的付値に対しては知られている．本講演では，Somos 4 数列の付値を楕円曲線上の局所高さで書き表し，その漸近挙動についてより精密な評価を行う．

k を 4 以上の自然数とする．数列 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が **Somos k 数列 (Somos k sequence)** であるとは，任意の整数 n に対して，漸化式

$$s_{n+k}s_n = \sum_{i=1}^{\lfloor k/2\rfloor} \alpha_i s_{n+k-i}s_{n+i}$$

を満たすことをいう．ここで，$\lfloor k/2\rfloor$ は $k/2$ の切り捨てであり，$\alpha_1,\dots,\alpha_{\lfloor k/2\rfloor}$ は定数である．Somos 数列は，1980 年代に Micheal Somos によって，テータ関数との関係から研究された．Somos 数列に関する詳細は Propp によって [10] にまとめられている．まず最も簡単な例を挙げる．

例 1. $k=4,\ \alpha_1=\alpha_2=1,\ s_0=s_1=s_2=s_3=1$ とする．このとき漸化式は

$$s_{n+4}s_n = s_{n+3}s_{n+1} + s_{n+2}^2$$

となる．この数列 $\{s_n\}$ を **Somos (4) 数列 (Somos (4) sequence)** と呼ぶ（文献によっては Somos-4 sequence とも呼ばれる）．最初の数項は次のようになる．

$$\dots,1,1,1,1,2,3,7,23,59,314,1529,\dots$$

漸化式から $s_n\in\mathbb{Q}$ となることは明らかであるが，実は $s_n\in\mathbb{Z}$ となることが証明されている．まず初等的な証明が Malouf, Bombieri, Hickerson によってそれぞれ独立に与えられた．Malouf の証明は [9] に述べられている．後に Fomin-Zelevinsky [6] によって，彼らが定義したクラスター代数を用いて，より一般の Somos 数列の場合を含む証明が与えられた．また，組合せ論的な解釈も知られている (cf. [4, Section 11.1.3])．

次に，より古典的な例として，M. Ward [16] によって導入された elliptic divisibility sequence を挙げる．

例 2. 整数列 $\{w_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が **elliptic divisibility sequence**（以下 EDS と略す）であるとは，任意の整数 m,n に対し，関係式

$$w_{m+n}w_{m-n} = w_{m+1}w_{m-1}w_n^2 - w_{n+1}w_{n-1}w_m^2 \tag{1}$$

を満たし，$m\mid n$ ならば $w_m\mid w_n$ となることをいう．

式 (1) において，$n=2$ を代入し，m を $n+2$ に置き換えると，

$$w_{n+4}w_n = w_2^2 w_{n+3}w_{n+1} - w_1 w_3 w_{n+2}^2$$

を得る．よって，EDS は Somos 4 数列である．また，式 (1) から，$w_0 = 0$, $w_1 = \pm 1$ が従う．以下では $w_1 = 1$ と仮定する．

本講演では次の問題を考察する．

問題. K を代数体，v を K の素点，$|\cdot|_v$ を v に付随する K 上の乗法付値とする．$\{s_n\}$ を Somos 4 数列とし，すべての整数 n に対して，$s_n \in K$ とする．

このとき，$|s_n|_v$ は漸近的にどのような挙動を示すか？

この問題は，$\{s_n\}$ が EDS $\{w_n\}$ である場合にはいくつかの結果が知られている (cf. [1, 2, 5])．特に，Cheon-Hahn [2] は，v が有限素点の場合に，$|w_n|_v$ を明示的に書き表した．

また，$\{s_n\}$ が一般の Somos 4 数列の場合には，Hone [8, Corollary 2.13] が無限素点 v に対して $|s_n|_v$ の漸近評価を与えた（この結果は Somos 5 数列に対するものであるが，Somos 4 数列は Somos 5 数列であることが知られているので，Somos 4 数列にも適用できる）．

本講演での主定理を述べるために，まず Somos 数列と楕円曲線との関係を述べる．以下，体 K 上の楕円曲線を考えるときは，Weierstrass 方程式

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6, \quad a_i \in K$$

が固定されているものとする．

M. Ward [16] は EDS に対して次を示した．

定理 3 ([16, Theorem 12.1])**.** $\{w_n\}$ を一般の EDS とする．このとき，$\omega_1, \omega_2, u \in \mathbb{C}$ が存在して，

$$w_n = \frac{\sigma(nu)}{\sigma(u)^{n^2}}.$$

ここで，σ は Weierstrass の σ 関数であり，

$$\sigma(u) = u \prod_{\omega \in (\omega_1\mathbb{Z}+\omega_2\mathbb{Z})\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{u}{\omega}\right) \exp\left(\frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{2\omega^2}\right). \tag{2}$$

代数的に言い換えると次のようになる．

定理 4. $\{w_n\}$ を一般の EDS とする．このとき，$\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線 E と有理点 $P \in E(\mathbb{Q})$ が存在して，

$$w_n = \psi_n(P).$$

ここで，ψ_n は E の n 等分多項式である．すなわち，$\psi_n(P)$ は，

$$\psi_n(P)^2 = n^2 \prod_{Q \in E[n]\setminus\{O\}} \bigl(x(P) - x(Q)\bigr)$$

を満たすような $x(P)$ と $y(P)$ の多項式である．ただし，$E[n] = \{Q \in E(\bar{\mathbb{Q}}) \bigm| [n]Q = O\}$ である．より正確な定義については，[12, Definition 1.18], [13, Exercise 3.7] などを参照せよ．

Somos 4 数列に対しても，楕円曲線との関係が様々な研究者によって明らかにされている．その中から簡潔なものを挙げる．

定理 5 ([7, Theorem 1.1])**.** $\{s_n\}$ を一般の Somos 4 数列とする．このとき，$\omega_1, \omega_2, u, v, a, b \in \mathbb{C}$ が存在して，

$$s_n = ab^n \frac{\sigma(nu+v)}{\sigma(u)^{n^2}}. \tag{3}$$

ここで，σ は式 (2) で定まる σ 関数である．

代数的には次のような結果が成り立つ．

定理 6 ([15, Theorems 7.2.2 and 7.2.4])**.** K を体とする．$\{s_n\}$ を一般の Somos 4 数列で，すべての整数 n に対し $s_n \in K$ となるものとする．このとき，K 上定義された楕円曲線 E，有理点 $P, Q \in E(K)$，定数 $\theta \in K^\times$ が存在して，$n \geq 1$ に対し，

$$s_n = \theta^{n(n-1)/2} \frac{s_1^n}{s_0^{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} \bigl(x(P) - x([i]P+Q)\bigr)^{n-i}. \tag{4}$$

次に楕円曲線上の局所高さについて述べる．詳しくは [14, Chapter VI] を参照せよ．K を代数体，E を K 上定義された楕円曲線とする．K の素点 v に対し，K_v を K の v での完備化とする．

定義 7. 関数 $\lambda_v \colon E(K_v) \setminus \{O\} \to \mathbb{R}$ が **（標準）局所高さ関数 ((canonical) local height function)** であるとは，次の条件を満たすことをいう．ただし，位相は v 進位相を考える．

1. λ_v は連続であり，O の任意の開近傍の補集合上で有界である．
2. 極限
$$\lim_{P \to O} \left(\lambda_v(P) - \frac{1}{2} \log |x(P)|_v \right)$$
が存在する．
3. （準平行四辺形則）任意の $P, Q \in E(K_v)$ に対し，$P, Q, P+Q, P-Q \neq O$ ならば，
$$\lambda_v(P+Q) + \lambda_v(P-Q) = 2\lambda_v(P) + 2\lambda_v(Q) - \log |x(P) - x(Q)|_v. \tag{5}$$

定理 8 (Néron-Tate)**.** 局所高さ関数 λ_v は一意的に存在する．

注意 9. 局所高さ関数の定義は文献によって異なっている．たとえば，[14, Chapter VI] とは定数の差だけ異なる．また，この定義は E の Weierstrass 方程式の取り方に依存する．

本講演の主定理は次の通りである．

定理 10. K を代数体，v を K の素点とする．$\{s_n\}$ を一般の Somos 4 数列で，すべての整数 n に対し $s_n \in K$ となるものとする．定理 6 によって，$\{s_n\}$ に対応する K 上定義された楕円曲線 E，有理点 $P, Q \in E(K)$，定数 $\theta \in K^\times$ が定まる．このとき，$n \geq 0$ に対し，

$$\begin{aligned} \log |s_n|_v = n(n-1) \left(\lambda_v(P) + \frac{1}{2} \log |\theta|_v \right) + n\lambda_v(P+Q) - (n-1)\lambda_v(Q) \\ + n \log |s_1|_v - (n-1) \log |s_0|_v - \lambda_v([n]P+Q). \end{aligned} \tag{6}$$

また，$\lambda_v([n]P+Q)$ は次のように評価される．

$$\lambda_v([n]P+Q) = \begin{cases} O(\log n) & (v\text{：無限素点}) \\ O(\log n(\log\log n)^3) & (v\text{：有限素点}) \end{cases} \tag{7}$$

最後に，定理 10 の証明の概略を述べる．式 (6) は式 (4) と式 (5) から従う．また，v が無限素点の場合には，式 (3) と局所高さの明示公式 (cf. [14, Chapter VI, §3]) からも同様の公式が証明できる．式 (7) の評価は，楕円対数の一次形式の評価を用いて証明される．素点 v が無限素点の場合は David-平田 [3] を，有限素点の場合は Rémond-Urfels [11] をそれぞれ用いる．

参考文献

[1] S. Akiyama, A criterion to estimate the least common multiple of sequences and asymptotic formulas for $\zeta(3)$ arising from recurrence relation of an elliptic function, Japan. J. Math. (N.S.) **22** (1996) 129–146.

[2] J. Cheon, S. Hahn, Explicit valuations of division polynomials of an elliptic curve, Manuscripta Math. **97** (1998) 319–328.

[3] S. David, N. Hirata-Kohno, Linear forms in elliptic logarithms, J. Reine Angew. Math. **628** (2009) 37–89.

[4] G. Everest, A. van der Poorten, I. Shparlinski, T. Ward, *Recurrence Sequences*, Mathematical Surveys and Monographs 104, American Mathematical Society, 2003.

[5] G. Everest, T. Ward, The canonical height of an algebraic point on an elliptic curve, New York J. Math. **6** (2000) 331–342.

[6] S. Fomin, A. Zelevinsky, The Laurent phenomenon, Adv. in Appl. Math. **28** (2002) 119–144.

[7] A. N. W. Hone, Elliptic curves and quadratic recurrence sequences, Bull. London Math. Soc. **37** (2005) 161–171.

[8] A. N. W. Hone, Sigma function solution of the initial value problem for Somos 5 sequences, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007) 5019–5034.

[9] J. L. Malouf, An integer sequence of rational recursion, Discrete Math. **110** (1992) 257–261.

[10] J. Propp, *The Somos Sequence Site*, `http://faculty.uml.edu/jpropp/somos.html`.

[11] G. Rémond, F. Urfels, Approximation diophantienne de logarithmes elliptiques p-adiques, J. Number Theory **57** (1996) 133–169.

[12] S. Schmitt, H. G. Zimmer, *Elliptic Curves: A Computational Approach*, de Gruyter Studies in Mathematics 31, Walter de Gruyter, 2003.

[13] J. H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Graduate Texts in Mathematics 106, Springer-Verlag, 1986.

[14] J. H. Silverman, *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves*, Graduate Texts in Mathematics 151, Springer-Verlag, 1994.

[15] C. S. Swart, Elliptic curves and related sequences, PhD thesis, Royal Holloway, University of London (2003).

[16] M. Ward, Memoir on elliptic divisibility sequences, Amer. J. Math. **70** (1948) 31–74.