偶数周期の連分数と末尾急増型主要対称部分

河本 史紀　岸 康弘　冨田 耕史

学習院大学　愛知教育大学　名城大学

早稲田大学整数論セミナー (2012.11.16)

話の流れ

(1) 我々の予想

(2) 末尾急増型 (ELE 型) 主要対称部分の折れ線グラフを見る

(3) 極小型自然数と極小型実 2 次体の定義 (Friesen and Halter-Koch の定理)

(4) 末尾急増型 (ELE 型) 主要対称部分の定義

(5) pre-ELE 型有限列の定義

(6) pre-ELE 型有限列から ELE 型主要対称部分を構成する

(7) ELE 型主要対称部分が定める極小型自然数

(8) 応用: 偶数周期 (≥ 4) の極小型実 2 次体の無限族

Gauss 予想

予想 (Gauss(1801))

類数 1 の実 2 次体は無限に多く存在する.

- 虚 2 次体についての類数 1 問題は, 1966 年に A.Baker と H.M.Stark によって独立に解決された (9 個に限る).

Gauss 予想

予想（Gauss(1801)）

類数 1 の実 2 次体は無限に多く存在する.

- 虚 2 次体についての類数 1 問題は, 1966 年に A.Baker と H.M.Stark によって独立に解決された (9 個に限る).

我々の予想

d : $4 \nmid d$ をみたす平方でない自然数

$$\omega(d) := \begin{cases} (1+\sqrt{d})/2, & \text{if } d \equiv 1 \mod 4, \\ \sqrt{d}, & \text{if } d \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

$\ell = \ell(d)$: $\omega(d)$ の（単純な）連分数展開の最小周期

我々の予想

d :　$4 \nmid d$ をみたす平方でない自然数

$$\omega(d) := \begin{cases} (1+\sqrt{d})/2, & \text{if } d \equiv 1 \mod 4, \\ \sqrt{d}, & \text{if } d \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

$\ell = \ell(d)$:　$\omega(d)$ の（単純な）連分数展開の最小周期

我々の予想

d： $4 \nmid d$ をみたす平方でない自然数

$$\omega(d) := \begin{cases} (1+\sqrt{d})/2, & \text{if } d \equiv 1 \mod 4, \\ \sqrt{d}, & \text{if } d \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

$\ell = \ell(d)$： $\omega(d)$ の（単純な）連分数展開の最小周期

我々の予想

d :　$4 \nmid d$ をみたす平方でない自然数

$$\omega(d) := \begin{cases} (1+\sqrt{d})/2, & \text{if } d \equiv 1 \mod 4, \\ \sqrt{d}, & \text{if } d \equiv 2,\, 3 \mod 4 \end{cases}$$

$\ell = \ell(d)$:　$\omega(d)$ の（単純な）連分数展開の最小周期

$\omega(d)$ の連分数展開

$$\sqrt{2} = [1, \overline{2}], \quad \sqrt{3} = [1, \overline{1, 2}], \quad (1+\sqrt{5})/2 = [1, \overline{1}], \quad \ldots\ldots$$

$\omega(d)$ の連分数展開

$\sqrt{2} = [1, \overline{2}]$, $\sqrt{3} = [1, \overline{1, 2}]$, $(1+\sqrt{5})/2 = [1, \overline{1}]$, ……

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

$\omega(d)$ の連分数展開

$$\sqrt{2} = [1, \overline{2}], \quad \sqrt{3} = [1, \overline{1, 2}], \quad (1+\sqrt{5})/2 = [1, \overline{1}], \quad \ldots\ldots$$

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

$\omega(d)$ の連分数展開

$$\sqrt{2} = [1, \overline{2}], \quad \sqrt{3} = [1, \overline{1, 2}], \quad (1+\sqrt{5})/2 = [1, \overline{1}], \quad \ldots\ldots$$

各周期における d の値

ℓ	d					
1	2	5	10	13	26	$\ldots$
2	3	6	11	15	18	$\ldots$
3	17	37	61	65	101	$\ldots$
4	7	14	23	33	34	$\ldots$
5	41	74	149	157	181	$\ldots$
6	19	22	54	57	59	$\ldots$
7	58	89	109	113	137	$\ldots$
8	31	71	91	135	153	$\ldots$
9	73	97	106	233	277	$\ldots$
10	43	67	86	115	118	$\ldots$
11	265	298	541	554	593	$\ldots$
12	46	103	127	177	209	$\ldots$
13	421	746	757	778	1021	$\ldots$
14	134	179	190	201	251	$\ldots$
15	193	281	481	1066	1417	$\ldots$
16	94	191	217	249	302	$\ldots$
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

各周期における d の値

ℓ	d					
1	2	5	10	13	26	...
2	3	6	11	15	18	...
3	17	37	61	65	101	...
4	7	14	23	33	34	...
5	41	74	149	157	181	...
6	19	22	54	57	59	...
7	58	89	109	113	137	...
8	31	71	91	135	153	...
9	73	97	106	233	277	...
10	43	67	86	115	118	...
11	265	298	541	554	593	...
12	46	103	127	177	209	...
13	421	746	757	778	1021	...
14	134	179	190	201	251	...
15	193	281	481	1066	1417	...
16	94	191	217	249	302	...
⋮	...	...	...	...	...	...

我々の予想

表の第 1 列目における最小の自然数 d_ℓ に注目:

$$d_1 = 2,\ d_2 = 3,\ d_3 = 17,\ d_4 = 7,\ d_5 = 41, \ldots$$

これらが square-free のとき, 実 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d_\ell})$ が現れる.

予想

$\ell \neq 7, 11, 49, 225, 299, 1032$ のとき,
d_ℓ は square-free, かつ $\mathbb{Q}(\sqrt{d_\ell})$ の類数 h_{d_ℓ} は 1 に等しい.

注意:

(1) $1 \leq \ell \leq 55444$ のとき, 予想は O.K.

(2) 類数 1 の極小型でない実 2 次体は多くても 52 個に限る.

(3) 類数 1 の平方でない自然数は最小元付近に集中している.

我々の予想

表の第 1 列目における最小の自然数 d_ℓ に注目:

$$d_1 = 2,\ d_2 = 3,\ d_3 = 17,\ d_4 = 7,\ d_5 = 41, \ldots$$

これらが square-free のとき, 実 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d_\ell})$ が現れる.

予想

$\ell \neq 7, 11, 49, 225, 299, 1032$ のとき,
d_ℓ は square-free, かつ $\mathbb{Q}(\sqrt{d_\ell})$ の類数 h_{d_ℓ} は 1 に等しい.

注意:

(1) $1 \leq \ell \leq 55444$ のとき, 予想は O.K.

(2) 類数 1 の極小型でない実 2 次体は多くても 52 個に限る.

(3) 類数 1 の平方でない自然数は最小元付近に集中している.

我々の予想

表の第 1 列目における最小の自然数 d_ℓ に注目:

$$d_1 = 2,\ d_2 = 3,\ d_3 = 17,\ d_4 = 7,\ d_5 = 41, \ldots$$

これらが square-free のとき, 実 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d_\ell})$ が現れる.

予想

$\ell \neq 7,\ 11,\ 49,\ 225,\ 299,\ 1032$ のとき,
d_ℓ は square-free, かつ $\mathbb{Q}(\sqrt{d_\ell})$ の類数 h_{d_ℓ} は 1 に等しい.

注意:

(1) $1 \leq \ell \leq 55444$ のとき, 予想は O.K.

(2) 類数 1 の極小型でない実 2 次体は多くても 52 個に限る.

(3) 類数 1 の平方でない自然数は最小元付近に集中している.

我々の予想

表の第 1 列目における最小の自然数 d_ℓ に注目:

$$d_1 = 2,\ d_2 = 3,\ d_3 = 17,\ d_4 = 7,\ d_5 = 41, \ldots$$

これらが square-free のとき, 実 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d_\ell})$ が現れる.

予想

$\ell \neq 7, 11, 49, 225, 299, 1032$ のとき,
d_ℓ は square-free, かつ $\mathbb{Q}(\sqrt{d_\ell})$ の類数 h_{d_ℓ} は 1 に等しい.

注意:

(1) $1 \leq \ell \leq 55444$ のとき, 予想は O.K.

(2) 類数 1 の極小型でない実 2 次体は多くても 52 個に限る.

(3) 類数 1 の平方でない自然数は最小元付近に集中している.

我々の予想

表の第 1 列目における最小の自然数 d_ℓ に注目:

$$d_1 = 2,\ d_2 = 3,\ d_3 = 17,\ d_4 = 7,\ d_5 = 41, \ldots$$

これらが square-free のとき, 実 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d_\ell})$ が現れる.

予想

$\ell \neq 7,\ 11,\ 49,\ 225,\ 299,\ 1032$ のとき,
d_ℓ は square-free, かつ $\mathbb{Q}(\sqrt{d_\ell})$ の類数 h_{d_ℓ} は 1 に等しい.

注意:

(1) $1 \leq \ell \leq 55444$ のとき, 予想は O.K.

(2) 類数 1 の極小型でない実 2 次体は多くても 52 個に限る.

(3) 類数 1 の平方でない自然数は最小元付近に集中している.

主要対称部分 (a primary symmetric part)

d: $4 \nmid d$ をみたす平方でない自然数, 2 次無理数

$$\omega(d) := \begin{cases} (1+\sqrt{d})/2, & \text{if } d \equiv 1 \mod 4, \\ \sqrt{d}, & \text{if } d \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

の連分数展開:

$$\omega(d) = [a_0, \overline{a_1, \ldots, a_{\ell-1}, a_\ell}]$$

を考える. 部分商 $a_1, \ldots, a_{\ell-1}$ は対称性:

$$a_n = a_{\ell-n}, \quad 1 \le \forall n \le \ell - 1$$

をもつ. $L := [\ell/2]$ とおく. 偶数周期 $\ell = 2L$ のとき対称部分は

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L, a_{L-1}, \ldots, a_1;$$

奇数周期 $\ell = 2L + 1$ のとき,

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L, a_L, a_{L-1}, \ldots, a_1.$$

本質的な L 個の自然数の列

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L$$

を**主要対称部分 (a primary symmetric part)** という.

主要対称部分 (a primary symmetric part)

d: $4 \nmid d$ をみたす平方でない自然数, 2 次無理数

$$\omega(d) := \begin{cases} (1+\sqrt{d})/2, & \text{if } d \equiv 1 \mod 4, \\ \sqrt{d}, & \text{if } d \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

の連分数展開:

$$\omega(d) = [a_0, \overline{a_1, \dots, a_{\ell-1}, a_\ell}]$$

を考える. 部分商 $a_1, \dots, a_{\ell-1}$ は対称性:

$$a_n = a_{\ell-n}, \quad 1 \leq \forall n \leq \ell - 1$$

をもつ. $L := [\ell/2]$ とおく. 偶数周期 $\ell = 2L$ のとき対称部分は

$$a_1, \dots, a_{L-1}, a_L, a_{L-1}, \dots, a_1;$$

奇数周期 $\ell = 2L+1$ のとき,

$$a_1, \dots, a_{L-1}, a_L, a_L, a_{L-1}, \dots, a_1.$$

本質的な L 個の自然数の列

$$a_1, \dots, a_{L-1}, a_L$$

を**主要対称部分 (a primary symmetric part)** という.

主要対称部分 (a primary symmetric part)

d: $4 \nmid d$ をみたす平方でない自然数，2 次無理数

$$\omega(d) := \begin{cases} (1+\sqrt{d})/2, & \text{if } d \equiv 1 \mod 4, \\ \sqrt{d}, & \text{if } d \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

の連分数展開:

$$\omega(d) = [a_0, \overline{a_1, \ldots, a_{\ell-1}, a_\ell}]$$

を考える．部分商 $a_1, \ldots, a_{\ell-1}$ は対称性:

$$a_n = a_{\ell-n}, \quad 1 \leq \forall n \leq \ell - 1$$

をもつ．$L := [\ell/2]$ とおく．偶数周期 $\ell = 2L$ のとき対称部分は

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L, a_{L-1}, \ldots, a_1;$$

奇数周期 $\ell = 2L+1$ のとき，

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L, a_L, a_{L-1}, \ldots, a_1.$$

本質的な L 個の自然数の列

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L$$

を**主要対称部分 (a primary symmetric part)** という．

主要対称部分 (a primary symmetric part)

d: $4 \nmid d$ をみたす平方でない自然数，2 次無理数

$$\omega(d) := \begin{cases} (1+\sqrt{d})/2, & \text{if } d \equiv 1 \mod 4, \\ \sqrt{d}, & \text{if } d \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

の連分数展開:

$$\omega(d) = [a_0, \overline{a_1, \ldots, a_{\ell-1}, a_\ell}]$$

を考える．部分商 $a_1, \ldots, a_{\ell-1}$ は対称性:

$$a_n = a_{\ell-n}, \quad 1 \leq \forall n \leq \ell - 1$$

をもつ．$L := [\ell/2]$ とおく．偶数周期 $\ell = 2L$ のとき対称部分は

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L, a_{L-1}, \ldots, a_1;$$

奇数周期 $\ell = 2L + 1$ のとき，

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L, a_L, a_{L-1}, \ldots, a_1.$$

本質的な L 個の自然数の列

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L$$

を**主要対称部分 (a primary symmetric part)** という．

主要対称部分 (a primary symmetric part)

d: $4 \nmid d$ をみたす平方でない自然数，2 次無理数

$$\omega(d) := \begin{cases} (1+\sqrt{d})/2, & \text{if } d \equiv 1 \mod 4, \\ \sqrt{d}, & \text{if } d \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

の連分数展開:

$$\omega(d) = [a_0, \overline{a_1, \ldots, a_{\ell-1}, a_\ell}]$$

を考える．部分商 $a_1, \ldots, a_{\ell-1}$ は対称性:

$$a_n = a_{\ell-n}, \quad 1 \leq \forall n \leq \ell - 1$$

をもつ．$L := [\ell/2]$ とおく．偶数周期 $\ell = 2L$ のとき対称部分は

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L, a_{L-1}, \ldots, a_1;$$

奇数周期 $\ell = 2L + 1$ のとき,

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L, a_L, a_{L-1}, \ldots, a_1.$$

本質的な L 個の自然数の列

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L$$

を**主要対称部分 (a primary symmetric part)** という．

主要対称部分 (a primary symmetric part)

d: $4 \nmid d$ をみたす平方でない自然数，2 次無理数

$$\omega(d) := \begin{cases} (1+\sqrt{d})/2, & \text{if } d \equiv 1 \mod 4, \\ \sqrt{d}, & \text{if } d \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

の連分数展開:

$$\omega(d) = [a_0, \overline{a_1, \ldots, a_{\ell-1}, a_\ell}]$$

を考える．部分商 $a_1, \ldots, a_{\ell-1}$ は対称性:

$$a_n = a_{\ell-n}, \quad 1 \leq \forall n \leq \ell - 1$$

をもつ．$L := [\ell/2]$ とおく．偶数周期 $\ell = 2L$ のとき対称部分は

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L, a_{L-1}, \ldots, a_1;$$

奇数周期 $\ell = 2L+1$ のとき，

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L, a_L, a_{L-1}, \ldots, a_1.$$

本質的な L 個の自然数の列

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L$$

を**主要対称部分** **(a primary symmetric part)** という．

主要対称部分 (a primary symmetric part)

d: $4 \nmid d$ をみたす平方でない自然数，2 次無理数

$$\omega(d) := \begin{cases} (1+\sqrt{d})/2, & \text{if } d \equiv 1 \mod 4, \\ \sqrt{d}, & \text{if } d \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

の連分数展開:

$$\omega(d) = [a_0, \overline{a_1, \ldots, a_{\ell-1}, a_\ell}]$$

を考える．部分商 $a_1, \ldots, a_{\ell-1}$ は対称性:

$$a_n = a_{\ell-n}, \quad 1 \leq \forall n \leq \ell - 1$$

をもつ．$L := [\ell/2]$ とおく．偶数周期 $\ell = 2L$ のとき対称部分は

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L, a_{L-1}, \ldots, a_1;$$

奇数周期 $\ell = 2L+1$ のとき，

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L, a_L, a_{L-1}, \ldots, a_1.$$

本質的な L 個の自然数の列

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L$$

を**主要対称部分** (a primary symmetric part) という．

主要対称部分 (a primary symmetric part)

d: $4 \nmid d$ をみたす平方でない自然数，2 次無理数

$$\omega(d) := \begin{cases} (1+\sqrt{d})/2, & \text{if } d \equiv 1 \mod 4, \\ \sqrt{d}, & \text{if } d \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

の連分数展開:

$$\omega(d) = [a_0, \overline{a_1, \ldots, a_{\ell-1}, a_\ell}]$$

を考える．部分商 $a_1, \ldots, a_{\ell-1}$ は対称性:

$$a_n = a_{\ell-n}, \quad 1 \leq \forall n \leq \ell - 1$$

をもつ．$L := [\ell/2]$ とおく．偶数周期 $\ell = 2L$ のとき対称部分は

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L, a_{L-1}, \ldots, a_1;$$

奇数周期 $\ell = 2L + 1$ のとき,

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L, a_L, a_{L-1}, \ldots, a_1.$$

本質的な L 個の自然数の列

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L$$

を**主要対称部分 (a primary symmetric part)** という．

主要対称部分 (a primary symmetric part)

d: $4 \nmid d$ をみたす平方でない自然数，2 次無理数

$$\omega(d) := \begin{cases} (1+\sqrt{d})/2, & \text{if } d \equiv 1 \mod 4, \\ \sqrt{d}, & \text{if } d \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

の連分数展開:

$$\omega(d) = [a_0, \overline{a_1, \ldots, a_{\ell-1}, a_\ell}]$$

を考える．部分商 $a_1, \ldots, a_{\ell-1}$ は対称性:

$$a_n = a_{\ell-n}, \quad 1 \leq \forall n \leq \ell - 1$$

をもつ．$L := [\ell/2]$ とおく．偶数周期 $\ell = 2L$ のとき対称部分は

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L, a_{L-1}, \ldots, a_1;$$

奇数周期 $\ell = 2L+1$ のとき，

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L, a_L, a_{L-1}, \ldots, a_1.$$

本質的な L 個の自然数の列

$$a_1, \ldots, a_{L-1}, a_L$$

を**主要対称部分 (a primary symmetric part)** という．

主要対称部分の折れ線グラフ

周期 ℓ の平方でない自然数 d, $4 \nmid d$ を小さい順に並べる:

$$d_\ell^{(0)} < d_\ell^{(1)} < \cdots < d_\ell^{(i)} < \cdots .$$

そして連分数展開

$$\omega(d_\ell^{(i)}) = [a_0^{(i)}, \overline{a_1^{(i)}, \ldots, a_{\ell-1}^{(i)}, a_\ell^{(i)}}]$$

の主要対称部分

$$a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_L^{(i)}$$

を考える. $\ell = 94$, $0 \leq i \leq n-1 = 1000-1$ とする. 3 次元空間に点

$$(x, y, z) = (i, j, a_j^{(i)}), \quad 0 \leq i \leq n-1 = 1000-1, \quad 1 \leq j \leq L\ (= 47)$$

をプロットし, 部分商

$$a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_L^{(i)}$$

を線で結んだ 1000 個のグラフを描く.

主要対称部分の折れ線グラフ

周期 ℓ の平方でない自然数 d, $4 \nmid d$ を小さい順に並べる:

$$d_\ell^{(0)} < d_\ell^{(1)} < \cdots < d_\ell^{(i)} < \cdots .$$

そして連分数展開

$$\omega(d_\ell^{(i)}) = [a_0^{(i)}, \overline{a_1^{(i)}, \ldots, a_{\ell-1}^{(i)}, a_\ell^{(i)}}]$$

の主要対称部分

$$a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_L^{(i)}$$

を考える. $\ell = 94$, $0 \le i \le n-1 = 1000-1$ とする. 3 次元空間に点

$$(x, y, z) = (i, j, a_j^{(i)}), \quad 0 \le i \le n-1 = 1000-1, \quad 1 \le j \le L\ (=47)$$

をプロットし, 部分商

$$a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_L^{(i)}$$

を線で結んだ 1000 個のグラフを描く.

主要対称部分の折れ線グラフ

周期 ℓ の平方でない自然数 d, $4 \nmid d$ を小さい順に並べる:

$$d_\ell^{(0)} < d_\ell^{(1)} < \cdots < d_\ell^{(i)} < \cdots .$$

そして連分数展開

$$\omega(d_\ell^{(i)}) = [a_0^{(i)}, \overline{a_1^{(i)}, \ldots, a_{\ell-1}^{(i)}, a_\ell^{(i)}}]$$

の主要対称部分

$$a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_L^{(i)}$$

を考える. $\ell = 94$, $0 \leq i \leq n-1 = 1000-1$ とする. 3 次元空間に点

$$(x, y, z) = (i, j, a_j^{(i)}), \quad 0 \leq i \leq n-1 = 1000-1, \quad 1 \leq j \leq L \ (= 47)$$

をプロットし, 部分商

$$a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_L^{(i)}$$

を線で結んだ 1000 個のグラフを描く.

主要対称部分の折れ線グラフ

周期 ℓ の平方でない自然数 d, $4 \nmid d$ を小さい順に並べる:

$$d_\ell^{(0)} < d_\ell^{(1)} < \cdots < d_\ell^{(i)} < \cdots .$$

そして連分数展開

$$\omega(d_\ell^{(i)}) = [a_0^{(i)}, \overline{a_1^{(i)}, \ldots, a_{\ell-1}^{(i)}, a_\ell^{(i)}}]$$

の主要対称部分

$$a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_L^{(i)}$$

を考える. $\ell = 94$, $0 \leq i \leq n-1 = 1000-1$ とする. 3 次元空間に点

$$(x, y, z) = (i, j, a_j^{(i)}), \quad 0 \leq i \leq n-1 = 1000-1, \quad 1 \leq j \leq L \ (= 47)$$

をプロットし, 部分商

$$a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_L^{(i)}$$

を線で結んだ 1000 個のグラフを描く.

主要対称部分の折れ線グラフ

周期 ℓ の平方でない自然数 d, $4 \nmid d$ を小さい順に並べる:

$$d_\ell^{(0)} < d_\ell^{(1)} < \cdots < d_\ell^{(i)} < \cdots .$$

そして連分数展開

$$\omega(d_\ell^{(i)}) = [a_0^{(i)}, \overline{a_1^{(i)}, \ldots, a_{\ell-1}^{(i)}, a_\ell^{(i)}}]$$

の主要対称部分

$$a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_L^{(i)}$$

を考える. $\ell = 94$, $0 \leq i \leq n-1 = 1000-1$ とする. 3 次元空間に点

$$(x, y, z) = (i, j, a_j^{(i)}), \quad 0 \leq i \leq n-1 = 1000-1, \quad 1 \leq j \leq L \ (= 47)$$

をプロットし, 部分商

$$a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_L^{(i)}$$

を線で結んだ 1000 個のグラフを描く.

主要対称部分の折れ線グラフ

周期 ℓ の平方でない自然数 d, $4 \nmid d$ を小さい順に並べる:

$$d_\ell^{(0)} < d_\ell^{(1)} < \cdots < d_\ell^{(i)} < \cdots .$$

そして連分数展開

$$\omega(d_\ell^{(i)}) = [a_0^{(i)}, \overline{a_1^{(i)}, \ldots, a_{\ell-1}^{(i)}, a_\ell^{(i)}}]$$

の主要対称部分

$$a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_L^{(i)}$$

を考える. $\ell = 94$, $0 \le i \le n-1 = 1000-1$ とする. 3 次元空間に点

$$(x, y, z) = (i, j, a_j^{(i)}), \quad 0 \le i \le n-1 = 1000-1, \quad 1 \le j \le L \ (= 47)$$

をプロットし, 部分商

$$a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_L^{(i)}$$

を線で結んだ 1000 個のグラフを描く.

周期 94 の部分商の様子

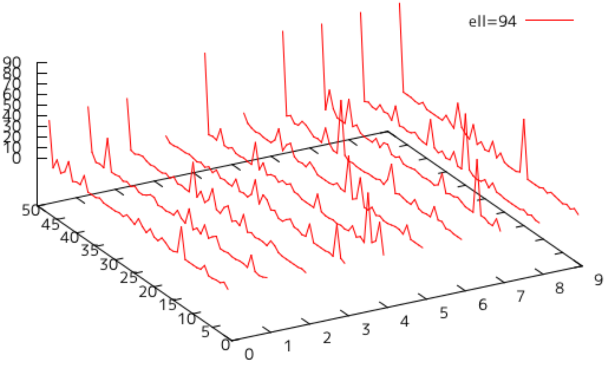

Figure: $\ell = 94$, $n = 10$ の場合の部分商の様子

周期 94 の部分商の様子

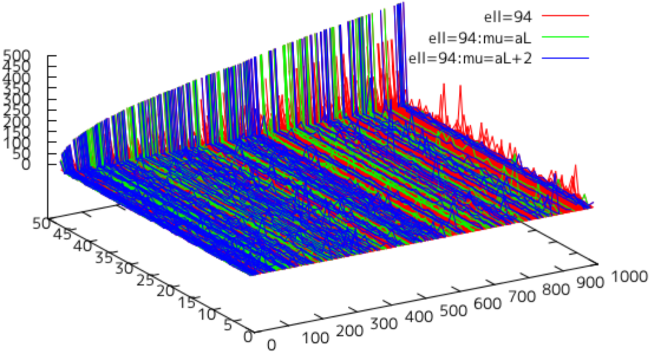

Figure: $\ell = 94$, $n = 1000$ の場合の部分商の様子

周期 101 の部分商の様子

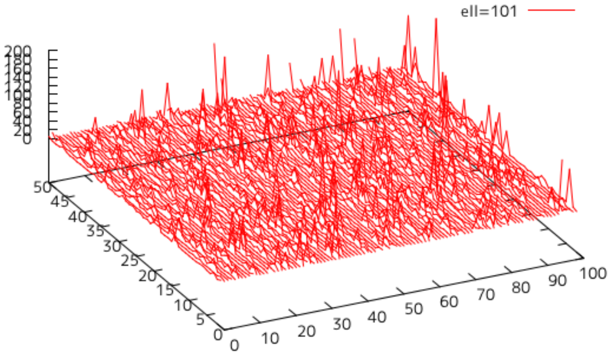

Figure: $\ell = 101$, $n = 100$ の場合の部分商の様子