# 超関数の保型対とL関数

宮崎　直

(佐藤文広氏, 田村敬太氏, 杉山和成氏, 上野隆彦氏との共同研究)

# 1. イントロダクション

**Riemannのゼータ関数**

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1)$$

**$\zeta(s)$のゼータ積分**

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R}$上の急減少関数$\}$に対して，ゼータ積分$Z(f;s)$を

$$Z(f;s) := \int_0^{\infty} t^{s-1} \sum_{n\neq 0} f(tn)dt = \Phi(f;s)\zeta(s) \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1)$$

で定義する.

$$\left( \Phi(f;s) := \int_{-\infty}^{\infty} |t|^{s-1} f(t)dt \qquad : \text{局所ゼータ関数} \right)$$

## $Z(f;s)$ の解析接続と関数等式

Poisson の和公式

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(n) \quad \left( \mathcal{F}(f)(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi\sqrt{-1}xy} dx \right)$$

において，$f(x)$ を $f(tx)$ に置き換えて整理すると，

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(tn) = t^{-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(t^{-1}n) \qquad (t>0)$$

となる．この等式を用いると，次の $Z(f;s)$ の表示が得られる：

$$Z(f;s) = \int_1^{\infty} t^{s-1} \sum_{n\neq 0} f(tn)\,dt - \frac{f(0)}{s}$$
$$+ \int_1^{\infty} t^{-s} \sum_{n\neq 0} \mathcal{F}(f)(tn)\,dt - \frac{\mathcal{F}(f)(0)}{1-s}.$$

この表示により，$Z(f;s)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続され，さらに関数等式

$Z(f;1-s) = Z(\mathcal{F}(f);s)$ をみたす事が分かる．

## 局所関数等式

局所ゼータ関数$\Phi(f;s)$は以下の局所関数等式をみたす：

$$\Phi(\mathcal{F}(f);s)=2(2\pi)^{-s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\Phi(f;1-s).$$

<u>注意1</u> $\Phi(f;s)$を定義する積分は，

$$\begin{cases} f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\text{のとき，領域}\,\mathrm{Re}(s)>0\,\text{上で絶対広義一様収束する.} \\ f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^\times)\text{のとき，}\mathbb{C}\text{上で絶対広義一様収束する.}\end{cases}$$

ここで，$C_0^\infty(\mathbb{R}^\times):=\{$ コンパクト台を持つ$\mathbb{R}^\times$上の$C^\infty$級関数$\}$.

<u>注意2</u> Fourier変換$\mathcal{F}$は$\mathcal{S}(\mathbb{R})$から$\mathcal{S}(\mathbb{R})$への同相写像を定める.
また，Fourier変換の反転公式

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x)=f(-x)\qquad\qquad(x\in\mathbb{R},\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}))$$

が成り立つ事も注意しておく.

## $\zeta(s)$ の解析接続と関数等式

$Z(f;s) = \Phi(f;s)\zeta(s)$ より，$\zeta(s)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続される．

また，次のようにして，$\zeta(s)$ の関数等式が得られる：

$$Z(f;1-s) = Z(\mathcal{F}(f);s) \Longrightarrow \Phi(f;1-s)\zeta(1-s) = \Phi(\mathcal{F}(f);s)\zeta(s)$$

$$\Longrightarrow \Phi(f;1-s)\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\Phi(f;1-s)\zeta(s)$$

($\because$ 局所関数等式)

$$\Longrightarrow \zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s)$$ ：$\zeta(s)$ の関数等式

Poisson の和公式と局所関数等式によって
$\zeta(s)$ の解析接続と関数等式は与えられる!!

# 2. $\mathbb{R}$上の超関数の保型対の定義

超関数(distribution)の復習

$T$が$\mathbb{R}$上の超関数(distribution)

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $T\colon C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ 　　$\mathbb{C}$-線型写像で次の条件をみたす：

　$\forall\Omega$：$\mathbb{R}$上のコンパクト集合　に対して，$\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\exists c > 0$ s.t.

$$|T(f)| \leq c \sum_{i=0}^{n} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f^{(i)}(x) \right| \qquad \left( \begin{array}{r} f \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \text{ s.t.} \\ \mathrm{supp}(f) \subset \Omega \end{array} \right).$$

ここで，$f^{(i)}$は$f$の第$i$次導関数である.

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}) := \{\mathbb{R}$上の超関数(distribution)$\}$

注意 $\mathbb{R}$上の連続関数$f_1$は$C_0^\infty(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_1(x) f(x)\, dx \in \mathbb{C}$と

同一視する事で$\mathcal{D}'(\mathbb{R})$の元と見なせる.

## Fourier展開で定義される超関数

$L$ : $\mathbb{R}$の格子

$\mathfrak{M}(L) := \{\alpha\colon L \to \mathbb{C} \mid \alpha$の増大度は高々多項式程度$\}$

$\alpha \in \mathfrak{M}(L)$に対して，$\mathcal{D}'(\mathbb{R})$の元$T_\alpha$を次のように定義する：

$$T_\alpha(f) = \sum_{l \in L} \alpha(l)\mathcal{F}(f)(l) \qquad (f \in C_0^\infty(\mathbb{R})).$$

注意 $C_0^\infty(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \mathcal{F}(f)(l) \in \mathbb{C}$は，$\mathbb{R}$上の連続関数$x \mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}lx}$に対応する$\mathcal{D}'(\mathbb{R})$の元である.

## 保型因子

$\mu \in \mathbb{C}^\times$と$\nu \in \mathbb{C}$に対して，“保型因子” $J_{\mu,\nu}$を次のように定義する：

$$J_{\mu,\nu}(x) := \mu^{\mathrm{sgn}(x)}|x|^{-2\nu-1} \qquad (x \in \mathbb{R}^\times).$$

$f \in C(\mathbb{R}^\times)$に対し，$f_{\mu,\nu,\infty}(x) := J_{\mu,\nu}(x)f(-1/x) \quad (x \in \mathbb{R}^\times)$とおく.

## 保型対

$L_1, L_2$ : $\mathbb{R}$の格子

このとき,

$$\mathcal{A}(L_1, L_2; J_{\mu,\nu})$$
$$:= \left\{ (T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha_1 \in \mathfrak{M}(L_1),\ \alpha_2 \in \mathfrak{M}(L_2) \\ T_{\alpha_1}(f) = T_{\alpha_2}(f_{\mu,\nu,\infty}) \quad (f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\times)) \end{array} \right\}$$

の元を, 保型因子$J_{\mu,\nu}$の$(L_1, L_2)$に関する超関数の保型対という.

ここで, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\times)$は$f(0) = 0$とおく事で$C_0^\infty(\mathbb{R})$の元とみなす.

<u>注意</u> $(f_{\mu,\nu,\infty})_{\mu,\nu,\infty} = f$より,

$$(T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2}) \in \mathcal{A}(L_1, L_2; J_{\mu,\nu}) \iff (T_{\alpha_2}, T_{\alpha_1}) \in \mathcal{A}(L_2, L_1; J_{\mu,\nu}).$$

## 保型対の例：Eisenstein 超関数

$\mathrm{Re}(\nu) > 0$ となる $\nu \in \mathbb{C}$ に対して，$\mathcal{E}_\nu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ を

$$\mathcal{E}_\nu(f) = \frac{1}{2} \sum_{m \neq 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |m|^{-2\nu-1} f\left(\frac{n}{m}\right) \qquad (f \in C_0^\infty(\mathbb{R}))$$

で定義する.

このとき，$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\times)$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\nu(f_{1,\nu,\infty}) &= \frac{1}{2} \sum_{m,n \neq 0} |m|^{-2\nu-1} f_{1,\nu,\infty}\left(\frac{n}{m}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m,n \neq 0} |m|^{-2\nu-1} \left|\frac{n}{m}\right|^{-2\nu-1} f\left(-\frac{m}{n}\right) = \mathcal{E}_\nu(f)\end{aligned}$$

より，$\mathcal{E}_\nu(f_{1,\nu,\infty}) = \mathcal{E}_\nu(f)$ が成立する.

また，$\mathcal{E}_\nu$ は，

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\nu(f) &= \frac{1}{2}\sum_{m\neq 0}|m|^{-2\nu-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{m}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{m\neq 0}|m|^{-2\nu-1}|m|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}(f)\,(mn) \quad (\because \text{Poissonの和公式}) \\
&= \zeta(2\nu)\mathcal{F}(f)(0)+\sum_{n\neq 0}\sigma_{-2\nu}(|n|)\mathcal{F}(f)(n) \qquad (\because mn\to n)
\end{aligned}$$

とFourier展開される．ここで，$\sigma_s(n)=\sum_{0<d|n} d^s$ とする．

以上により，$(\mathcal{E}_\nu,\mathcal{E}_\nu)\in\mathcal{A}(\mathbb{Z},\mathbb{Z};J_{1,\nu})$ である事が分かる．

<u>注意</u> $\mathcal{E}_\nu$ のFourier係数は，$SL(2,\mathbb{Z})$ に関する実解析的Eisenstein級数のFourier係数と(本質的に)一致している．

## この後の話の流れ

関係式$T_{\alpha_1}(f) = T_{\alpha_2}(f_{\mu,\nu,\infty})$は次のような和公式に書き直せる：

$$\sum_{l \in L_1} \alpha_1(l)\mathcal{F}(f)(l) = \sum_{l \in L_2} \alpha_2(l)\mathcal{F}(f_{\mu,\nu,\infty})(l).$$

この和公式と局所関数等式があれば，§1の$\zeta(s)$の場合と同様にして，$\alpha_1$, $\alpha_2$から定義されるL関数の解析接続や関数等式などが得られる.

- §3: この事と，その "逆" が成立する事を紹介する.
- §4: 超関数の保型対は，モジュラー形式やMaass形式の一般化と見なせる事を紹介する.
- §5: $\mathbb{R}^q$上の 超関数の保型対に関する研究を紹介する.

## 超関数の保型対に関する既知の結果

[1] 鈴木利明氏は，$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ 上の超関数の保型対の Fourier 係数から定まる L 関数は $\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続され，関数等式をみたす事を証明した．さらに，$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ 上の Eisenstein 超関数を構成して，Siegel Eisenstein 級数に付随する Koecher-Maass 級数の解析接続と関数等式の証明を与えた．

[2] 佐藤文広氏と田村敬太氏は，可換放物型の概均質ベクトル空間上の超関数の保型対を定義し，鈴木利明氏の手法を一般化する事で，その Fourier 係数から定まる L 関数は $\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続され，関数等式をみたす事を示した．

注意1 概均質ベクトル空間上で定義される局所ゼータ関数は，$\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続され，局所関数等式をみたす．

注意2 §2 $\sim$ 4 で扱う $\mathbb{R}$ 上の超関数の保型対は，[2] の $(GL(1), V(1))$ の場合にあたる．また，§5 で扱う $\mathbb{R}^q$ 上の超関数の保型対は，[2] の $(GL(1) \times SO(q), V(q))$ の場合にあたる．

# 3. 保型対とL関数

## L関数

$\alpha \in \mathfrak{M}(L)$ に対して，L関数 $\xi_\pm(\alpha; s)$ を次のように定義する：

$$\xi_\pm(\alpha; s) := \sum_{0<l\in L} \frac{\alpha(\pm l)}{l^s} \qquad (\mathrm{Re}(s) \gg 0).$$

## $\xi_\pm(\alpha; s)$ のゼータ積分

$\alpha \in \mathfrak{M}(L)$ と $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\times)$ に対して，ゼータ積分 $Z(\alpha, f; s)$ を

$$\begin{aligned} Z(\alpha, f; s) &:= \int_0^\infty t^{s-1} \sum_{0\neq l\in L} \alpha(l)\mathcal{F}(f)(tl)dt \qquad (\mathrm{Re}(s) \gg 0) \\ &= \Phi_+(\mathcal{F}(f); s)\xi_+(\alpha; s) + \Phi_-(\mathcal{F}(f); s)\xi_-(\alpha; s) \end{aligned}$$

で定義する．

$$\left( \Phi_\pm(f; s) := \int_0^\infty t^{s-1} f(\pm t)dt \text{ : 局所ゼータ関数} \right)$$

## $Z(\alpha_i, f; s)$の解析接続と関数等式

$(T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2}) \in \mathcal{A}(L_1, L_2; J_{\mu,\nu})$ であるとき，和公式

$$\sum_{l \in L_1} \alpha_1(l)\mathcal{F}(f)(l) = \sum_{l \in L_2} \alpha_2(l)\mathcal{F}(f_{\mu,\nu,\infty})(l) \qquad (f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\times))$$

を用いると，次のような$Z(\alpha_1, f; s)$の表示が得られる：

$$\begin{aligned} Z(\alpha_1, f; s) = &\int_1^\infty t^{s-1} \sum_{0 \neq l \in L_1} \alpha_1(l)\mathcal{F}(f)(tl)dt - \frac{\alpha_1(0)\mathcal{F}(f)(0)}{s} \\ &+ \int_1^\infty t^{-s-2\nu} \sum_{0 \neq l \in L_2} \alpha_2(l)\mathcal{F}(f_{\mu,\nu,\infty})(tl)dt - \frac{\alpha_2(0)\mathcal{F}(f_{\mu,\nu,\infty})(0)}{-s-2\nu+1}. \end{aligned}$$

この表示により，$Z(\alpha_1, f; s)$は$\mathbb{C}$上有理型に解析接続され，関数等式

$$Z(\alpha_1, f; s) = Z(\alpha_2, f_{\mu,\nu,\infty}; -s-2\nu+1)$$

をみたす事が分かる.

## 局所関数等式

局所ゼータ関数 $\Phi_{\pm}(f;s)$ は次の等式をみたす：

(1) $(\Phi_+(\mathcal{F}(f);s),\Phi_-(\mathcal{F}(f);s))$

$$= (2\pi)^{-s}\Gamma(s)(\Phi_+(f;-s+1),\Phi_-(f;-s+1))\gamma(s) \qquad (f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})).$$

ここで，$\gamma(s)=\begin{pmatrix} e^{\pi\sqrt{-1}s/2} & e^{-\pi\sqrt{-1}s/2} \\ e^{-\pi\sqrt{-1}s/2} & e^{\pi\sqrt{-1}s/2} \end{pmatrix}$ とする.

(2) $(\Phi_+(f_{\mu,\nu,\infty};s),\Phi_-(f_{\mu,\nu,\infty};s))$

$$= (\Phi_+(f;-s+2\nu+1),\Phi_-(f;-s+2\nu+1))\Sigma_\mu \qquad (f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^\times)).$$

ここで，$\Sigma_\mu=\begin{pmatrix} 0 & \mu^{-1} \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$ とする.

<u>注意</u> $\Phi_{\pm}(f;s)$ を定義する積分は,

$$\begin{cases} f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ のとき，領域 } \mathrm{Re}(s)>0 \text{ 上で絶対広義一様収束する.} \\ f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^\times) \text{ のとき，} \mathbb{C} \text{ 上で絶対広義一様収束する.} \end{cases}$$

## $\xi_\pm(\alpha_i; s)$ の解析接続と関数等式

$\alpha \in \mathfrak{M}(L)$ に対して，$\Xi_\pm(\alpha; s) := (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\xi_\pm(\alpha; s)$ とおくと，

$$\begin{aligned} Z(\alpha, f; s) &= (\Phi_+(\mathcal{F}(f); s), \Phi_-(\mathcal{F}(f); s)) \begin{pmatrix} \xi_+(\alpha; s) \\ \xi_-(\alpha; s) \end{pmatrix} \\ &= (\Phi_+(f; -s+1), \Phi_-(f; -s+1))\gamma(s) \begin{pmatrix} \Xi_+(\alpha; s) \\ \Xi_-(\alpha; s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

($\because$ 局所関数等式)

この等式を用いて，$\Xi_\pm(\alpha_i; s)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続される.

また，$Z(\alpha_1, f; s) = Z(\alpha_2, f_{\mu,\nu,\infty}; -s-2\nu+1)$ を上の等式と

$$\begin{aligned} &(\Phi_+(f_{\mu,\nu,\infty}; s), \Phi_-(f_{\mu,\nu,\infty}; s)) \\ &\quad = (\Phi_+(f; -s+2\nu+1), \Phi_-(f; -s+2\nu+1))\Sigma_\mu \end{aligned}$$

を用いて書き下すと，$\Xi_\pm(\alpha_i; s)$ の関数等式が得られる.

**定理1**

$(T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2}) \in \mathcal{A}(L_1, L_2; J_{\mu,\nu})$ のとき，次の(c1),(c2),(c3)が成立する：

(c1) $\Xi_+(\alpha_1; s)$ と $\Xi_-(\alpha_1; s)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続され，

$$\gamma(s)\begin{pmatrix}\Xi_+(\alpha_1; s)\\ \Xi_-(\alpha_1; s)\end{pmatrix} + \left(\frac{\alpha_1(0)}{s}1_2 - \frac{\alpha_2(0)}{s+2\nu-1}\Sigma_\mu\right)\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

は整関数となる.

(c2) $\gamma(s)\begin{pmatrix}\Xi_+(\alpha_1; s)\\ \Xi_-(\alpha_1; s)\end{pmatrix} = \Sigma_\mu\gamma(-s-2\nu+1)\begin{pmatrix}\Xi_+(\alpha_2; -s-2\nu+1)\\ \Xi_-(\alpha_2; -s-2\nu+1)\end{pmatrix}$

(c3) $\sigma_1 < \sigma_2$ をみたす任意の $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\Xi_\pm(\alpha_1; s) = O(1) \quad (|s| \to \infty) \quad \text{on } \sigma_1 \le \mathrm{Re}(s) \le \sigma_2.$$

**注意** $(T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2}) \in \mathcal{A}(L_1, L_2; J_{\mu,\nu}) \iff (T_{\alpha_2}, T_{\alpha_1}) \in \mathcal{A}(L_2, L_1; J_{\mu,\nu})$ であるから，定理1において，(c1)と(c3)は $\alpha_1$ と $\alpha_2$ を入れ替えても成立する事に注意する.

定理2

$\alpha_1 \in \mathfrak{M}(L_1)$, $\alpha_2 \in \mathfrak{M}(L_2)$ が定理1の(c1),(c2),(c3)をみたすとき，$(T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2}) \in \mathcal{A}(L_1, L_2; J_{\mu,\nu})$ となる．

■ 定理2の証明の要点：

- Step 1 等式

$$Z(\alpha_i, f; s) = (\Phi_+(f; -s+1), \Phi_-(f; -s+1))\gamma(s)\begin{pmatrix} \Xi_+(\alpha_i; s) \\ \Xi_-(\alpha_i; s) \end{pmatrix}$$

により，$\Xi_\pm(\alpha_i; s)$ の性質(c1),(c2),(c3)は，ゼータ積分 $Z(\alpha_i, f; s)$ の性質に書き換えられる．

- Step 2 Mellinの逆公式より，

$$\sum_{0\neq l\in L_i} \alpha_i(l)\mathcal{F}(f)(tl) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\mathrm{Re}(s)=\sigma} Z(\alpha_i, f; s)t^{-s}\,ds \quad (\sigma \gg 0)$$

という等式が得られる．この等式により，ゼータ積分の諸性質から保型対の定義にある和公式が得られる．□

# 4. 保型対と保型形式

## 周期的超関数

$L$ : $\mathbb{R}$ の格子, $\quad L^\vee := \{l \in \mathbb{R} \mid lL \subset L\}$ : $L$ の双対格子

$$\mathcal{D}'(L^\vee \backslash \mathbb{R}) := \left\{ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \,\middle|\, \begin{array}{l} T(f(\cdot\, + l)) = T(f) \\ (l \in L^\vee,\ f \in C_0^\infty(\mathbb{R})) \end{array} \right\}.$$

**定理3** (well-known)

$\mathfrak{M}(L) \ni \alpha \mapsto T_\alpha \in \mathcal{D}'(L^\vee \backslash \mathbb{R})$ は全単射である.

注意 定理3より, $\mathcal{D}'(L^\vee \backslash \mathbb{R})$ に対して, 唯1つの $\alpha \in \mathfrak{M}(L)$ が存在して,

$$T(f) = T_\alpha(f) = \sum_{l \in L} \alpha(l) \mathcal{F}(f)(l) \qquad (f \in C_0^\infty(\mathbb{R}))$$

と表せる. この表示を $T$ の Fourier 展開という.

定理3より,

$$\mathcal{A}(J_{\mu,\nu}) := \left\{ (T_1, T_2) \,\middle|\, \begin{array}{l} T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \\ T_1(f) = T_2(f_{\mu,\nu,\infty}) \quad (f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\times)) \end{array} \right\}$$

とおくと,

$$\mathcal{A}(L_1, L_2; J_{\mu,\nu}) = \left(\mathcal{D}'(L_1^\vee \backslash \mathbb{R}) \times \mathcal{D}'(L_2^\vee \backslash \mathbb{R})\right) \cap \mathcal{A}(J_{\mu,\nu})$$

と表せる.

## $\boxed{SL(2,\mathbb{R})\text{とその部分群}}$

$G := SL(2,\mathbb{R}), \quad \mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$

$P = NM$ : $G$の放物型部分群

$$N := \{\mathrm{n}_x \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad M := \{\mathrm{m}_y \mid y \in \mathbb{R}^\times\},$$

$$\mathrm{n}_x := \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{m}_y := \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1/y \end{pmatrix}.$$

$G = PwN \sqcup P$ : Bruhat分解

$= P\bar{N} \sqcup Pw^{-1}$,

$$\bar{N} := wNw^{-1} = \left\{ \bar{\mathrm{n}}_x := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}, \quad w := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\rho$ : $G$の$C^\infty(G)$上の右正則作用，すなわち，

$$(\rho(g)\phi)(h) = \phi(hg) \quad (h, g \in G,\ \phi \in C^\infty(G)).$$

## 球主系列表現

$\nu \in \mathbb{C}$に対して，

$$I_P(\nu) := \left\{ \phi \in C^\infty(G) \;\middle|\; \begin{array}{l} \phi(\mathrm{n}_x \mathrm{m}_y g) = |y|^{2\nu+1}\phi(g) \\ \quad (x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^\times,\ g \in G) \end{array} \right\}$$

とおく．このとき，$(\rho, I_P(\nu))$を$G$の球主系列表現という．

$i \in \{1,2\}$に対して，$\iota_{\nu,i} \colon C_0^\infty(\mathbb{R}) \to I_P(\nu)$を次のように定義する：

$$\iota_{\nu,1}(f)(g) := \begin{cases} |y|^{2\nu+1} f(x) & \text{if } g = \mathrm{n}_{x'} \mathrm{m}_y w \mathrm{n}_x \in PwN, \\ 0 & \text{if } g \in P. \end{cases}$$

$$\iota_{\nu,2}(f)(g) := \begin{cases} |y|^{2\nu+1} f(x) & \text{if } g = \mathrm{n}_{x'} \mathrm{m}_y \bar{\mathrm{n}}_{-x} \in P\bar{N}, \\ 0 & \text{if } g \in Pw^{-1}. \end{cases}$$

このとき，$w\, \mathrm{n}_x = \mathrm{n}_{-1/x} \mathrm{m}_{1/x} \bar{\mathrm{n}}_{1/x} \quad (x \in \mathbb{R}^\times)$より，

$$\iota_{\nu,1}(f) = \iota_{\nu,2}(f_{1,\nu,\infty}) \qquad (f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\times))$$

が成立する．

$I_P(\nu)^\vee := \{\mathcal{T}\colon I_P(\nu) \to \mathbb{C}$ 連続な$\mathbb{C}$-線型写像$\}$ $I_P(\nu)$の連続双対空間

**命題4**

$\tilde{\iota}_\nu\colon I_P(\nu)^\vee \ni \mathcal{T} \mapsto (\mathcal{T}\circ\iota_{\nu,1}, \mathcal{T}\circ\iota_{\nu,2}) \in \mathcal{A}(J_{1,\nu})$ は全単射である.

■ 命題4の証明の要点：

$G = PwN \cup P\bar{N}$ は$G$の開被覆である.

$\rightsquigarrow$ 任意の$\phi \in I_P(\nu)$に対して，$\phi = \iota_{\nu,1}(f_1) + \iota_{\nu,2}(f_2)$となる $f_1, f_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$が存在する.

この事を用いて，$\tilde{\iota}_\nu$の逆写像を構成できる. □

注意 一般の$\mathcal{A}(J_{\mu,\nu})$は，$SL(2,\mathbb{R})$の普遍被覆群の主系列表現の連続双対空間と対応している.

## 滑らかな保型形式

$\Gamma$ : $G$の離散部分群

滑らかな保型形式の空間$\mathcal{A}^\infty(\Gamma\backslash G)$を

$$\mathcal{A}^\infty(\Gamma\backslash G) := \left\{ \phi \in C^\infty(G) \,\middle|\, \begin{array}{l} \phi(\gamma g) = \phi(g) \quad (\gamma \in \Gamma). \\ \rho(Z(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))\phi \text{は有限次元.} \\ \phi \text{は一様緩増加.} \end{array} \right\}$$

で定義し，$G$はこの空間に右正則作用$\rho$で作用するとする.

ここで，$Z(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$は$\mathfrak{g}$の複素化$\mathfrak{g}_\mathbb{C}$の普遍包絡環の中心である.

注意1 普通は保型形式を考える際は，$\Gamma$は$\Gamma\backslash G$が体積有限になるようにとるが，この講演では$\Gamma$は単に$G$の離散部分群としておく.

注意2 通常の保型形式の定義には“$K$-有限” という条件も加わる.
“滑らかな保型形式” という呼び名はWallachに倣っている.

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_G(I_P(\nu),\mathcal{A}^\infty(\Gamma\backslash G))\\&:=\left\{\eta\colon I_P(\nu)\to\mathcal{A}^\infty(\Gamma\backslash G)\;\middle|\;\begin{array}{l}\eta\text{ は連続 }\mathbb{C}\text{-線型写像}\\ \rho(g)\eta(\phi)=\eta(\rho(g)\phi)\ \ (g\in G,\ \phi\in I_P(\nu))\end{array}\right\}\end{aligned}$$

$$\left(I_P(\nu)^\vee\right)^\Gamma:=\{\mathcal{T}\in I_P(\nu)^\vee\mid\mathcal{T}(\rho(\gamma)\phi)=\mathcal{T}(\phi)\ \ (\gamma\in\Gamma,\ \phi\in I_P(\nu))\}$$

**命題 5** (Wallach?)

$$\begin{array}{lccc}\Psi_\nu\colon\ \mathrm{Hom}_G(I_P(\nu),\mathcal{A}^\infty(\Gamma\backslash G)) & \to & \left(I_P(\nu)^\vee\right)^\Gamma & \text{は全単射である.}\\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\eta & \mapsto & (\phi\mapsto\eta(\phi)(1_2)) & \end{array}$$

(逆写像は, $(\phi\mapsto\mathcal{T}(\rho(\,\cdot\,)\phi))\hookleftarrow\ \mathcal{T}$ で与えられる. )

## 保型対と保型形式

$\Gamma_\ell = \Gamma_{(L_1,L_2)}$ : $\{\mathrm{n}_l \mid l \in L_1^\vee\} \cup \{\bar{\mathrm{n}}_l \mid l \in L_2^\vee\}$が生成する$G$の部分群.

**命題6**

$\mathcal{T} \in \left(I_P(\nu)^\vee\right)^{\Gamma_\ell}$に対して,
$\tilde{\iota}_\nu(\mathcal{T}) = (\mathcal{T} \circ \iota_{\nu,1}, \mathcal{T} \circ \iota_{\nu,2}) \in \mathcal{A}(L_1, L_2; J_{1,\nu})$が成立する.

■ 命題6の証明の要点：

定義より, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$に対して,

- $\iota_{\nu,1}(f(\,\cdot\, + l)) = \rho(\mathrm{n}_l)\iota_{\nu,1}(f) \quad (l \in L_1^\vee)$.
- $\iota_{\nu,2}(f(\,\cdot\, + l)) = \rho(\bar{\mathrm{n}}_{-l})\iota_{\nu,2}(f) \quad (l \in L_2^\vee)$.

が成立する事を用いれば, 容易に示せる. $\square$

**定理7**

$(T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2}) \in \mathcal{A}(L_1, L_2; J_{1,\nu})$に対して，$\mathcal{T} = \tilde{\iota}_\nu^{-1}(T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2}) \in I_P(\nu)^\vee$とおく．このとき，

$\mathcal{T} \in \left(I_P(\nu)^\vee\right)^{\Gamma_\ell} \iff \alpha_1, \alpha_2$は(c4)をみたす．

(c4) $\xi_\pm(\alpha_1; s)$と$\xi_\pm(\alpha_2; s)$は，共に$\mathbb{C}$上有理型に解析接続されて，$\mathbb{C} - \{1, -2\nu + 1\}$上正則で，$s = 1, -2\nu + 1$では高々1位の極しか持たない．

注意 Knopp (1978)の結果より，$L_1 = L_2 = \frac{1}{2}\mathbb{Z}$の場合に(c1),(c2),(c3)をみたし，(c4)をみたさないL関数が存在する事が分かっている．従って，保型形式に由来しない超関数の保型対も存在する．

■ 定理7の証明の要点：

$l\in\mathbb{R}$と$\phi\in I_P(\nu)$に対し，Jacquet積分$J_l(\phi)$を次のように定義する：

$$J_l(\phi) := \int_{\mathbb{R}} \phi(w\mathrm{n}_x)e^{2\pi\sqrt{-1}lx}dx \quad \left(\begin{array}{l}\text{右辺は}\mathrm{Re}(\nu)>0\text{の範囲でしか,}\\ \text{一般には絶対収束しないが, 適切}\\ \text{に}\mathbb{C}\text{上に拡張する.}\end{array}\right).$$

$J_l(\iota_{\nu,1}(f)) = \mathcal{F}(f)(l)$ と$T_{\alpha_1}(f)=\mathcal{T}(\iota_{\nu,1}(f))$より，$T_{\alpha_1}$のFourier展開は次のように書き直せる：

$$\mathcal{T}(\iota_{\nu,1}(f)) = \sum_{l\in L_1}\alpha_1(l)J_l(\iota_{\nu,1}(f)) \qquad (f\in C_0^\infty(\mathbb{R})).$$

この展開は

$$\mathcal{T}(\phi) = \sum_{m=0}^{M}\beta_1(m)(\rho(X_-^m)\phi)(1_2) + \sum_{l\in L_1}\alpha_1(l)J_l(\phi) \quad (\phi\in I_P(\nu))$$

という形の展開に拡張される．ここで，$X_- = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\in\bar{\mathfrak{n}}=\mathrm{Lie}(\bar{N})$.

$T_{\alpha_2}$ のFourier展開も同様に，係数$\beta_2(m)$の項を付け加えた形で拡張され，それらを用いて次が示せる(簡単のため，$2\nu \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ とする)：

- $\mathcal{T}$ が $\mathcal{T}(\rho(\mathrm{n}_l)\phi) = \mathcal{T}(\phi) \quad (l \in L_1^\vee,\ \phi \in I_P(\nu))$ をみたす
  $\iff$ すべての$m \geq 1$に対して，$\beta_1(m) = 0$である.
- $\mathcal{T}$ が $\mathcal{T}(\rho(\bar{\mathrm{n}}_l)\phi) = \mathcal{T}(\phi) \quad (l \in L_2^\vee,\ \phi \in I_P(\nu))$ をみたす
  $\iff$ すべての$m \geq 1$に対して，$\beta_2(m) = 0$である.
- $\xi_\pm(\alpha_1; s)$ と $\xi_\pm(\alpha_2; s)$ は $s = -2\nu + 1,\ m + 1\ (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ を除いて正則で，これらの点では高々1位の極を持ち，

$$\operatorname*{Res}_{s=m+1} \xi_\pm(\alpha_1; s) = (\pm 2\pi\sqrt{-1})^m \beta_2(m),$$
$$\operatorname*{Res}_{s=m+1} \xi_\pm(\alpha_2; s) = (\pm 2\pi\sqrt{-1})^m \beta_1(m).$$

これらから定理7の主張は得られる. □

<u>注意</u> 証明中の拡張されたFourier展開は，保型形式のJacquet積分を用いたFourier展開と一致する.

## まとめ

これまでに述べた事をまとめると，次の可換図式になる：

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}(L_1)\times\mathfrak{M}(L_2) \arrow[r, leftrightarrow, "1:1"] \arrow[d, phantom, "\cup" description] & \mathcal{D}'(L_1^\vee\backslash\mathbb{R})\times\mathcal{D}'(L_2^\vee\backslash\mathbb{R}) \arrow[d, phantom, "\cup" description] & \\
\left\{\begin{array}{l}(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathfrak{M}(L_1)\times\mathfrak{M}(L_2)\\ \text{s.t. (c1), (c2), (c3)}\end{array}\right\} \arrow[r, leftrightarrow, "1:1"] \arrow[d, phantom, "\cup" description] & \mathcal{A}(L_1,L_2;J_{1,\nu}) \subset & \mathcal{A}(J_{1,\nu}) \arrow[d, leftrightarrow, "1:1"] \\
\left\{\begin{array}{l}(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathfrak{M}(L_1)\times\mathfrak{M}(L_2)\\ \text{s.t. (c1), (c2), (c3), (c4)}\end{array}\right\} \arrow[r, leftrightarrow, "1:1"] & \left(I_P(\nu)^\vee\right)^{\Gamma_\ell} \subset \arrow[u] \arrow[d, leftrightarrow, "1:1"] & I_P(\nu)^\vee \\
& \mathrm{Hom}_G(I_P(\nu),\mathcal{A}^\infty(\Gamma_\ell\backslash G)) &
\end{tikzcd}
$$

## いくつかの注意

- 条件を強める事で，$\Gamma_\ell$ より大きい離散群に関する保型形式も扱える．例えば，$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \in \mathfrak{M}(L)$ が (c1), (c2), (c3), (c4) をみたすとき，$\tilde{\Gamma}_\ell$ を $\Gamma_\ell$ と $w$ が生成する群とすると，$\mathcal{T} := \tilde{\iota}_\nu^{-1}(T_\alpha, T_\alpha)$ は $\left(I_P(\nu)^\vee\right)^{\tilde{\Gamma}_\ell}$ の元である．特に，$L = \mathbb{Z}$ なら $\tilde{\Gamma}_\ell = SL(2, \mathbb{Z})$ である．

- $2\nu$ が負の奇数でないとき，$\mathrm{Hom}_G(I_P(\nu), \mathcal{A}^\infty(\Gamma\backslash G))$ の元 $\eta$ は Maass 波動形式と対応している．実際，$\phi_0 \in I_P(\nu)$ を

$$\phi_0(g) = (c^2 + d^2)^{-\nu-1/2} \qquad \left( g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \right)$$

で定義すると，

$$\varphi(x + \sqrt{-1}y) := \eta(\phi_0)(\mathrm{n}_x\, \mathrm{m}_{\sqrt{y}}) \qquad (x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}_{>0})$$

は Maass 波動形式である．

- $2\nu$が奇数であるとき，球主系列表現$(\rho, I_P(\nu))$は可約である.
  正の偶数$\kappa$に対して，$I_P\left(-\frac{\kappa-1}{2}\right)$は正則離散系列表現と反正則離散系列表現を商表現にもっており，$\mathrm{Hom}_G\Big(I_P\left(-\frac{\kappa-1}{2}\right), \mathcal{A}^\infty(\Gamma\backslash G)\Big)$の元$\eta$は正則モジュラー形式と反正則モジュラー形式の組に対応している.
  実際，$\phi_\kappa^\pm \in I_P\left(-\frac{\kappa-1}{2}\right)$を

$$\phi_\kappa^\pm(g) = \frac{(d \mp \sqrt{-1}c)^\kappa}{c^2+d^2} \qquad \left( g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \right)$$

  で定義し，

$$\varphi_\pm(x+\sqrt{-1}y) = y^{-\kappa/2}\eta(\phi_\kappa^\pm)(\mathrm{n}_x\, \mathrm{m}_{\sqrt{y}}) \qquad (x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}_{>0})$$

  とおくと，$\varphi_+$と$\varphi_-$はそれぞれ重み$\kappa$の正則モジュラー形式と反正則モジュラー形式である.

# 5. $\mathbb{R}^q$ 上の超関数の保型対

記法

$q \geq 2$ : 整数

$x = {}^t(x_1, x_2, \cdots, x_q),\ y = {}^t(y_1, y_2, \cdots, y_q) \in \mathbb{R}^q$ に対して,

$$\langle x, y \rangle = {}^t xy = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_q y_q$$

とおく.

$x \in \mathbb{R}^q$ に対して, $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ とおく.

$\mathbb{R}^q$ 上の可積分関数 $f$ に対して, その Fourier 変換を

$$\mathcal{F}(f)(y) := \int_{\mathbb{R}^q} f(x) e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, y \rangle} dx \qquad (y \in \mathbb{R}^q)$$

で定義する.

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^q) := \{\mathbb{R}$ 上の超関数(distribution)$\}$

## Fourier展開で定義される超関数

$L$ : $\mathbb{R}^q$ の格子

$\mathfrak{M}(L) := \{\alpha\colon L \to \mathbb{C} \mid \alpha$の増大度は高々多項式程度$\}$

$\alpha \in \mathfrak{M}(L)$ に対して，$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^q)$ の元 $T_\alpha$ を次のように定義する：

$$T_\alpha(f) = \sum_{l \in L} \alpha(l)\mathcal{F}(f)(l) \qquad (f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q)).$$

## 保型因子

$\nu \in \mathbb{C}$ に対して，“保型因子” $J_\nu$ を

$$J_\nu(x) := |x|^{-2\nu-q} \qquad (x \in \mathbb{R}^q - \{0\})$$

と定義する．また，$f \in C(\mathbb{R}^q - \{0\})$ に対して，

$$f_{\nu,\infty}(x) := J_\nu(x) f\left(-\frac{1}{|x|^2}x\right) \qquad (x \in \mathbb{R}^q - \{0\})$$

とおく．

$\boxed{\text{保型対}}$

$L_1, L_2$ : $\mathbb{R}^q$ の格子

このとき,

$$\mathcal{A}(L_1, L_2; J_\nu) := \left\{ (T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha_1 \in \mathfrak{M}(L_1),\ \alpha_2 \in \mathfrak{M}(L_2) \\ T_{\alpha_1}(f) = T_{\alpha_2}(f_{\nu,\infty}) \quad (f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q - \{0\})) \end{array} \right\}$$

の元を，保型因子 $J_\nu$ の $(L_1, L_2)$ に関する超関数の保型対という.

( $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q - \{0\})$ は $f(0) = 0$ とおく事で $C_0^\infty(\mathbb{R}^q)$ の元とみなす. )

<u>注意</u> $(f_{\nu,\infty})_{\nu,\infty} = f$ より,

$$(T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2}) \in \mathcal{A}(L_1, L_2; J_\nu) \iff (T_{\alpha_2}, T_{\alpha_1}) \in \mathcal{A}(L_2, L_1; J_\nu).$$

## 調和多項式付きL関数

$\mathcal{H}_d(\mathbb{R}^q) := \{\mathbb{R}^q$ 上の $d$ 次同次調和多項式関数$\}$

$$= \left\{ Q \;\middle|\; \begin{array}{l} Q(x) = Q(x_1, x_2, \cdots, x_q) \text{ は } d \text{ 次同次多項式}, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_q^2}\right) Q(x) = 0 \end{array} \right\}.$$

$Q \in \mathcal{H}_d(\mathbb{R}^q)$ と $\alpha \in \mathfrak{M}(L)$ に対して，L関数 $\xi_\pm(Q, \alpha; s)$ を

$$\xi(Q, \alpha; s) := \sum_{l \in L - \{0\}} \frac{Q(l)\alpha(l)}{|l|^{s+d}} \qquad (\mathrm{Re}(s) \gg 0).$$

で定義する．さらに，

$$\Xi(Q, \alpha; s) := \pi^{-s+q/2} \frac{\Gamma\left(\frac{s+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-s+d+q}{2}\right)} \xi(Q, \alpha; s)$$

とおく．

**定理 8**

$(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathfrak{M}(L_1)\times\mathfrak{M}(L_2)$とする．このとき，

$(T_{\alpha_1},T_{\alpha_2})\in\mathcal{A}(L_1,L_2;J_\nu) \iff \forall d\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, \forall Q\in\mathcal{H}_d(\mathbb{R}^q)$に対して，次の(C1),(C2),(C3)が成立する：

(C1) $\Xi(Q,\alpha_1;s)$ は$\mathbb{C}$上有理型に解析接続され，$d\neq 0$ならば整関数である．また，$d=0$かつ$Q=1$ならば

$$\Xi(1,\alpha_1;s)+\mathrm{vol}(S^{q-1})\left(\frac{\alpha_1(0)}{s}-\frac{\alpha_2(0)}{s+2\nu-q}\right)$$

は整関数となる．ここで，$\mathrm{vol}(S^{q-1})=2\pi^{-q/2}\Gamma(q/2)$とする．

(C2) $\Xi(Q,\alpha_1;s)=(-1)^d\Xi(Q,\alpha_2;-s-2\nu+q)$.

(C3) $\sigma_1<\sigma_2$をみたす任意の$\sigma_1,\sigma_2\in\mathbb{R}$に対して，

$$\Xi(Q,\alpha_1;s)=O(1)\quad(|s|\to\infty)\qquad \text{on } \sigma_1\leq\mathrm{Re}(s)\leq\sigma_2.$$

注意 $(T_{\alpha_1},T_{\alpha_2})\in\mathcal{A}(L_1,L_2;J_\nu) \iff (T_{\alpha_2},T_{\alpha_1})\in\mathcal{A}(L_2,L_1;J_\nu)$だから，定理8の(C1)と(C3)で$\alpha_1$と$\alpha_2$を入れ替えても良い．

## いくつかの注意

- $SO_0(1, q+1)$ の球主系列表現から滑らかな保型形式のなす空間への $SO_0(1, q+1)$-準同型写像から，$\mathbb{R}^q$ 上の超関数の保型対が構成できる事が分かっている.
- 概均質ベクトル空間のゼータ関数で，(C1), (C2), (C3) をみたすものが存在する？