# CM 体に付随するセルマー群の概可除性と 多変数岩澤主予想の円分特殊化について

原 隆* (大阪大学大学院理学研究科数学専攻)

早稲田整数論セミナー　　2013 年 11 月 22 日　於 早稲田大学

以下 $p$ は奇素数とし，有理数体の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ の埋め込み $\iota_\infty\colon \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, $\iota_p\colon \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定する．

## § 概可除加群とセルマー群の概可除性

**■概可除加群** [Gr06]

$\mathcal{R}$：標数 $p$ の有限体を剰余体に持つ完備ネーター正則局所整域

$\rightsquigarrow$ アウスランダー-バックスバウムの定理より一意分解整域

**定義** (概可除加群・擬零加群)．

余有限生成[*1]離散 $\mathcal{R}$-加群 $A$ が **概可除 $\mathcal{R}$-加群** *almost divisible* $\mathcal{R}$*-module*

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 有限個を除く高さ 1 の $\mathcal{R}$ の素イデアル $\mathfrak{P}$ に対して $\mathfrak{P}A = A$ が成立

$\overset{\mathcal{R}\colon \text{UFD より}}{\Leftrightarrow}$ ${}^\exists \theta \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ s.t., $\theta$ と互いに素な $\mathcal{R}$ の任意の元 $\lambda$ について $\lambda A = A$ が成立

有限生成コンパクト $\mathcal{R}$-加群 $X$ が **擬零 $\mathcal{R}$-加群** *pseudonull* $\mathcal{R}$*-module*

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $X$ に付随する素イデアル[*2]の高さが 2 以上

$\overset{\mathcal{R}\colon \text{UFD より}}{\Leftrightarrow}$ $X$ の零化イデアル $\mathrm{Ann}_{\mathcal{R}}(X)$ が $\mathcal{R}$ の互いに素な二元を含む

$A$：余有限生成離散 $\mathcal{R}$-加群

$X = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(A, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$：$A$ のポントリャーギン双対　　$\rightsquigarrow$ 有限生成コンパクト $\mathcal{R}$-加群

**補題** ([Gr06, Proposition 2.4])．以下は同値．

(1) $X$ が非自明な擬零 $\mathcal{R}$-部分加群を持たない．

(2) 有限個を除く高さ 1 の $\mathcal{R}$ の素イデアル $\mathfrak{P}$ に対して $X[\mathfrak{P}] = 0$ が成立．

(3) $A$ が概可除 $\mathcal{R}$-加群．

**【証明の概略】** (2) $\Leftrightarrow$ (3) $X[\mathfrak{P}]$ のポントリャーギン双対が $A/\mathfrak{P}A$ となることから直ちに従う．

(1) $\Rightarrow$ (2) 仮定より $X$ に付随する素イデアルは全て高さが高々 1．また $\mathcal{R}$ のネーター性及び $X$ の有限生成性から $X$ に付随する素イデアルは有限個．このとき，$X$ に付随する素イデアルを除く全ての高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{P}$ に対して $X[\mathfrak{P}] = 0$ が成立 (もし $\mathfrak{P}x = 0$ なる $x \in X \setminus \{0\}$ が存在すれば，$\mathfrak{P}$ は $X$ に付随する素イデアルとなることが簡単に確認出来る)．

* 日本学術振興会特別研究員 (PD)　課題番号 23 · 200

*1 cofinitely generated, $A$ のポントリャーギン双対が $\mathcal{R}$ 上有限生成であるということ．

*2 associated prime ideal, 或る $X$ の元 $x$ の零化域 $\mathfrak{Q} = \mathrm{Ann}_{\mathcal{R}}(x)$ として表される素イデアル $\mathfrak{Q}$ のこと．

(2) $\Rightarrow$ (1) 対偶を示す．$X$ が非自明な擬零部分加群を持つと仮定すると，$X$ に付随する素イデアルで高さが 2 以上のもの $\mathfrak{Q}$ が存在する (擬零部分加群 $Y \neq 0$ に付随する素イデアルをとれば良い)．このとき $X[\mathfrak{Q}] \neq 0$ であるので，$\mathfrak{Q}$ に含まれる無限個の高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{P}$ に対して $X[\mathfrak{P}] \neq 0$ が成立.

□

**■グリーンバーグの概可除性判定法** [Gr12]

$\mathsf{K}$ : 代数体,　$S$: $p$ 上の素点及び無限素点を全て含む $\mathsf{K}$ の素点の有限集合

$\mathsf{K}_S/\mathsf{K}$ : $S$ の外不分岐な $\mathsf{K}$ の最大ガロア拡大

$\mathcal{R}$ : 標数 $p$ の有限体を剰余体に持つ標数 0 の完備ネーター正則局所整域

$\mathcal{R}^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(\mathcal{R}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ : $\mathcal{R}$ のポントリャーギン双対

$\mathcal{T}$ : $\mathrm{Gal}(\mathsf{K}_S/\mathsf{K})$ の連続作用を持つ $\mathcal{R}$ 上の有限階数自由加群,　$\mathcal{A} = \mathcal{T} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}^\vee$ : $\mathcal{T}$ の離散化*3

$\mathcal{T}^* = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(\mathcal{A}, \mu_{p^\infty})$ : $\mathcal{A}$ のクンマー双対 (或いはカルティエ双対)*4

各 $v \in S$ に対して局所ガロワコホモロジー $H^1(\mathsf{K}_v, \mathcal{A})$ の部分 $\mathcal{R}$ 加群 $L(\mathsf{K}_v, \mathcal{A})$ を固定し，$\mathcal{L}$-セルマー群 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{L}}(\mathsf{K}, \mathcal{A})$ を大域-局所制限写像

$$\phi_{\mathcal{L}} \colon H^1(\mathsf{K}_S/\mathsf{K}, \mathcal{A}) \to \prod_{v \in S} \frac{H^1(\mathsf{K}_v, \mathcal{A})}{L(\mathsf{K}_v, \mathcal{A})}$$

の核として定義.

**定理** ([Gr12, Theorem 4.1.1])．以下を仮定する.

($\mathsf{RFX}_{\mathcal{R}}$) $\mathcal{R}$ は反射的*5;

($\mathsf{LOC}^{(1)}_{\mathcal{A},S}$) 或る非アルキメデス素点 $v \in S$ に対し $(\mathcal{T}^*)^{D_v} = 0$ ( 但し $D_v$ は $v$ での分解群 );

($\mathsf{LOC}^{(2)}_{\mathcal{A},S}$) 全ての $v \in S$ に対し $\mathcal{T}^*/(\mathcal{T}^*)^{D_v}$ は反射的*6;

($\mathsf{LEO}_{\mathcal{A}}$) $Ш^2(\mathsf{K}, S, \mathcal{A}) := \ker\left[H^2(\mathsf{K}_S/\mathsf{K}, \mathcal{A}) \to \prod_{v \in S} H^2(\mathsf{K}_v, \mathcal{A})\right]$ が余捩れ*7$\mathcal{R}$-加群 ;

($\mathsf{SUR}_{\mathcal{A},\mathcal{L}}$) $\phi_{\mathcal{L}}$ が全射.

さらに $\prod_{v \in S} L(\mathsf{K}_v, \mathcal{A})$ が $\mathcal{R}$ 上概可除であるならば，$\mathrm{Sel}_{\mathcal{L}}(\mathsf{K}, \mathcal{A})$ も $\mathcal{R}$ 上概可除.

※ ($\mathrm{SUR}_{\mathcal{A},\mathcal{L}}$) は，条件

($\mathsf{CRK}_{\mathcal{A},\mathcal{L}}$) $\mathcal{R}$-余階数*8に関する等式

$$\mathrm{corank}_{\mathcal{R}} H^1(\mathsf{K}_S/\mathsf{K}, \mathcal{A}) = \mathrm{corank}_{\mathcal{R}} \mathrm{Sel}_{\mathcal{L}}(\mathsf{K}, \mathcal{A}) + \mathrm{corank}_{\mathcal{R}} \left( \prod_{v \in S} H^1(\mathsf{K}_v, \mathcal{A})/L(\mathsf{K}_v, \mathcal{A}) \right)$$

が成立する;

及び若干の補助的な条件から導出される ([Gr10, Proposition 3.2.1], 双対セルマー群の消滅に帰着する)．条件 ($\mathrm{CRK}_{\mathcal{A},\mathcal{L}}$) はガロワコホモロジーのオイラー標数公式等を用いて確認出来る条件.

※ ($\mathrm{LEO}_{\mathcal{A}}$) は古典的な場合の弱レオポルト予想に関係する非常に非自明な条件．また，($\mathrm{LEO}_{\mathcal{A}}$) が成立するならば，有限個を除く $\mathcal{R}$ の高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{P}$ に対して ($\mathrm{LEO}_{\mathcal{A}[\mathfrak{P}]}$) が $\mathcal{R}/\mathfrak{P}$-加群 $\mathcal{A}[\mathfrak{P}]$ に対して成立することが知られている ([Gr06, Lemma 4.4.1 及び Remark 2.1.3] 参照).

---

*3 $\mathrm{Gal}(\mathsf{K}_S/\mathsf{K})$ は第 1 成分のみに作用するものとする.

*4 $g \in \mathrm{Gal}(\mathsf{K}_S/\mathsf{K})$ の $\mathcal{T}^*$ の元 $f$ への作用は $(gf)(x) := gf(g^{-1}x)$ で定義されるものとする.

*5 reflexive, $\mathcal{R}$ の商体 $\mathrm{Frac}(\mathcal{R})$ に於いて $\mathcal{R} = \bigcap_{\mathfrak{P}\,:\,\text{高さ 1 の素イデアル}} \mathcal{R}_{\mathfrak{P}}$ が成立するということ.

*6 $\mathcal{T}^*/(\mathcal{T}^*)^{D_v} \otimes_{\mathcal{R}} \mathrm{Frac}(\mathcal{R})$ に於いて $\mathcal{T}^*/(\mathcal{T}^*)^{D_v} = \bigcap_{\mathfrak{P}\,:\,\text{高さ 1 の素イデアル}} (\mathcal{T}^*/(\mathcal{T}^*)^{D_v})_{\mathfrak{P}}$ が成立するということ.

*7 cotorsion, ポントリャーギン双対が捩れ $\mathcal{R}$-加群となること.

*8 corank, ポントリャーギン双対の $\mathcal{R}$-階数のこと.

## § 参考資料: ヒルベルト保型形式の場合の諸設定について

$F^+$ : $d$ 次総実代数体 ($p$ 上の素点は全て不分岐と仮定), $\mathfrak{r}_{F^+}$ : $F^+$ の整数環
$I_{F^+}$ : $F^+$ の $\overline{\mathbb{Q}}$ への $\mathbb{Q}$-埋め込み全体の集合 $(\sharp I_{F^+} = d)$
$\mathsf{t} = \sum_{\tau \in I_{F^+}} \tau \, (\in \mathbb{Z}[I_{F^+}])$ : "ノルム元"

**■(アデール的) ヒルベルト尖点形式**

$(\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{Z}[I_{F^+}] \times \mathbb{Z}[I_{F^+}]$ s.t., $(\kappa_1 + \kappa_2 = [\kappa]\mathsf{t}$ for $[\kappa] \in \mathbb{Z})$ かつ $(\kappa_1 < \kappa_2)$ を満たす
………肥田の "二桁重さ"
$\mathfrak{N} \subset \mathfrak{r}_{F^+}$ : 整イデアル ……レベル
$\varepsilon \colon \mathbb{A}_{F^+}^{\times}/F^{+,\times} \to \mathbb{C}^{\times}$ 法 $\mathfrak{N}$, 無限型 $\kappa_1 + \kappa_2 - \mathsf{t}$ の $(A_0)$ 型量指標 …… Nebentypus

$$\hat{\Gamma}_0(\mathfrak{N}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathfrak{r}_{F^+} \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}}) \;\middle|\; c \in \mathfrak{N} \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}} \right\} \quad (\text{合同部分群 } \Gamma_0(N) \text{ の類似})$$

※ $GL_2(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})_+ \cong GL_2(\mathbb{R})_+^{I_{F^+}}$ ($GL_2(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$ の単位元を含む連結成分) は，ポワンカレ上半平面 $\mathfrak{h}$ の $\sharp I_{F^+}$ 個の直積 $\mathfrak{h}^{I_{F^+}}$ に座標毎のメビウス変換で作用する．$\mathbf{i} = (\sqrt{-1}, \ldots, \sqrt{-1})$ に関する $GL_2(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})_+$ の等方化部分群を $C_{\mathbf{i}}$ と表す.

以上の設定の下で，**重さ** $(\kappa_1, \kappa_2)$，**レベル** $\mathfrak{N}$, *Nebentypus* $\varepsilon$ **のヒルベルト尖点形式** は関数 $f \colon GL_2(\mathbb{A}_{F^+}) \to \mathbb{C}$ で以下の 3 条件件を満たすものとして定義される;

1. (保型性)
   各 $\alpha \in GL_2(F^+)$, $\zeta \in Z(GL_2(\mathbb{A}_{F^+}))$ (スカラー行列), $u = u_f u_\infty \in \hat{\Gamma}_0(\mathfrak{N}) C_{\mathbf{i}}$ に対して
   $$f(\alpha x u \zeta) = \varepsilon(\zeta) \varepsilon_f(u_f) f(x) J_{\kappa_1, \kappa_2}(u_\infty, \mathbf{i})^{-1}$$
   が成立．但し $\varepsilon_f$ は $\varepsilon$ の有限部分で，$\mathfrak{r}_{F^+} \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}}$ の元 $a$ に対して その $\mathfrak{r}_{F^+,\mathfrak{N}} := \prod_{\mathfrak{l} \mid \mathfrak{N}} \mathfrak{r}_{F^+,\mathfrak{l}}$ への射影を $a_{\mathfrak{N}}$ で表すことにするとき
   $$\varepsilon_f\left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) := \varepsilon_f(a_{\mathfrak{N}}) \quad {}^{\forall} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}_0(\mathfrak{N})$$
   と定める．また保型因子 $J_{\kappa_1, \kappa_2}(u_\infty, z)$ は
   $$J_{\kappa_1, \kappa_2}\left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) := (ad - bc)^{\kappa_1 - \mathsf{t}} (cz + d)^{\kappa_2 - \kappa_1 + \mathsf{t}}$$
   $${}^{\forall} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})_+, \ {}^{\forall} z = (z_\tau)_{\tau \in I_{F^+}} \in \mathfrak{h}^{I_{F^+}}$$
   で定義する．
2. (正則性)
   各 $z \in \mathfrak{h}^{I_{F^+}}$ に対して，$GL_2(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})_+$ の元 $u_\infty^{(z)}$ を $u_\infty^{(z)}(\mathbf{i}) = z$ を満たす様に選ぶとき，
   $$f_g \colon \mathfrak{h}^{I_{F^+}} \to \mathbb{C} \ ; \ z \mapsto f(g u_\infty^{(z)}) J_{\kappa_1, \kappa_2}(u_\infty^{(z)}, \mathbf{i})$$
   は全ての $g \in GL_2(\mathbb{A}_{F^+}^f)$ に対して正則関数を定める.
3. (尖点性)
   各 $x \in GL_2(\mathbb{A}_{F^+}^f)$ に対して $\displaystyle\int_{\mathbb{A}_{F^+}/F^+} f\left( \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \right) du = 0$ が成立.
   但し $du$ は $\mathbb{A}_{F^+}/F^+$ の適当なハール測度.

重さ $(\kappa_1, \kappa_2)$, レベル $\mathfrak{N}$, Nebentypus $\varepsilon$ のヒルベルト尖点形式の空間を $S_{\kappa_1, \kappa_2}(\mathfrak{N}, \varepsilon; \mathbb{C})$ と書く (これは $\kappa_1 + \kappa_2$ が $\mathsf{t}$ の整数倍かつ $\varepsilon$ の無限型が $\kappa_1 + \kappa_2 - \mathsf{t}$ となるとき以外には $\{0\}$ となる).

▶ **ヒルベルト尖点形式のフーリエ係数**　$\mathbf{e}_{\mathbb{A}_{F^+}}$ を $\mathbb{A}_{F^+}/F^+$ 上の標準的な加法的指標とするとき，$f \in S_{\kappa_1,\kappa_2}(\mathfrak{N},\varepsilon;\mathbb{C})$ は (アデール的) フーリエ級数展開

$$f\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = |y|_{\mathbb{A}_{F^+}} \sum_{\xi \in F_+^{+,\times}} C(\xi y \mathfrak{d}; f)(\xi y_\infty)^{-\kappa_1} \mathbf{e}_{\mathbb{A}_{F^+}^\infty}(\sqrt{-1}\xi y_\infty)\mathbf{e}_{\mathbb{A}_{F^+}}(\xi x) \quad {}^\forall x \in \mathbb{A}_{F^+},\ {}^\forall y \in \mathbb{A}_{F^+}^\times$$

を持つ ($\mathfrak{d}$ は $F^+$ の絶対共役差積, $F_+^{+,\times}$ は $F^+$ の総正な非零元全体のなす加法的モノイド)．$C(-;f)$ は $F^+$ の整イデアル上定義された複素数値関数となる．これを $f$ **のフーリエ係数** と呼ぶ.

$F^+$ の位数有限の量指標 $\phi\colon \mathbb{A}_{F^+}^\times/F^{+,\times} \to \mathbb{C}^\times$ に対し，$f$ に付随する $L$ 関数 (の $\phi$ による捻り) をディリクレ級数

$$L(s;f,\phi) = \sum_{(0)\neq\mathfrak{A}\subset\mathfrak{r}_{F^+}} \frac{C(\mathfrak{A};f)\phi(\mathfrak{A})}{\mathcal{N}\mathfrak{A}^s}$$

(の複素平面 $\mathbb{C}$ への有理型接続) で定義する．但し $\mathcal{N}\mathfrak{A}$ はイデアル $\mathfrak{A}$ の絶対ノルム.

## ■ヒルベルト尖点形式の円分 $p$ 進 $L$ 関数

(Yuri Ivanovič Manin, 落合理 [Och12], Mladen Dimitrov [Di13],...)

$\chi_{\mathrm{cyc}}\colon \mathrm{Gal}(F^+(\mu_{p^\infty})/F^+) \to \mathbb{Z}_p^\times$　$p$ 進円分指標

$k = \sum_{\tau\in I_{F^+}} k_\tau \tau \in \mathbb{Z}[I_{F^+}]$ に対し $k^* = \max_{\tau\in I_F} k_\tau$, $k_* = \min_{\tau\in I_F} k_\tau$ と定める.

$f \in S_{\kappa_1,\kappa_2}(\mathfrak{N},\varepsilon;\overline{\mathbb{Q}})$ を正規化された $p$ 安定な固有尖点形式とし，さらに $p$ に於いて概通常であると仮定する．$\mathcal{O}$ を $\mathbb{Q}_p$ の “十分大きな” 有限次拡大の整数環とするとき，($f$ に付随する剰余ガロワ表現に関する幾つかの技術的な仮定の下で) 岩澤代数 $\Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}} := \mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(F^+(\mu_{p^\infty})/F^+)]]$ の元 $\mathscr{L}_p^{\mathrm{cyc}}(f)$ で以下の補間性質で特徴付けられるものが唯一つ存在する;

$$\begin{aligned}&\chi_{\mathrm{cyc}}^j\phi(\mathscr{L}_p^{\mathrm{cyc}}(f)) \\ &\quad = G(\phi^{-1}) \prod_{\tau\in I_{F^+}} \frac{\Gamma(j-\kappa_{1,\tau})}{\Gamma(\kappa_1^*+1-\kappa_{1,\tau})} \prod_{\mathfrak{p}|p\mathfrak{r}_{F^+}} A_\mathfrak{p}(j;f,\phi) \frac{L(j;f,\phi)}{(-2\pi\sqrt{-1})^{j(d-\kappa_1^*-1)} C_{f,\infty}^{\epsilon_{\phi,j}}}\end{aligned}$$

但し $j$ は $\kappa_1^*+1 \le j \le \kappa_{2,*}$ を満たす任意の整数を動き，$\phi$ は $\mathrm{Gal}(F^+(\mu_{p^\infty})/F^+)$ の任意の位数有限な指標を動く．$G(\phi^{-1})$ は $\phi^{-1}$ に対するガウス和であり，$p$ 上の素点での局所因子 $A_\mathfrak{p}(f;\phi,j)$ は，$\alpha_\mathfrak{p}(f)$ を二次方程式 $X^2 - C(\mathfrak{p};f)X + \varepsilon(\mathfrak{p})\mathcal{N}\mathfrak{p} = 0$ の根のうち “$p$ 概通常” であるものとするとき

$$A_\mathfrak{p}(f;\phi,j) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\phi^{-1}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p})\mathcal{N}\mathfrak{p}^{j-1}}{\alpha_\mathfrak{p}(f)} & \mathfrak{p} \text{ が } \phi \text{ の導手 } \mathfrak{c}(\phi) \text{ と素であるとき,} \\ \left(\dfrac{\mathcal{N}\mathfrak{p}^{j-1}}{\alpha_\mathfrak{p}(f)}\right)^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\mathfrak{c}(\phi))} & \mathfrak{p} \text{ が } \phi \text{ の導手 } \mathfrak{c}(\phi) \text{ を割り切るとき} \end{cases}$$

で与えられる ($\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p}$ の幾何的フロベニウス元)．さらに $\epsilon_{\phi,j} \in \{\pm 1\}^{I_{F^+}}$ は $(-1)^{j-\kappa_1^*-1}\mathrm{sgn}(\phi)$ で与えられる．$C_{f,\infty}^{\epsilon_{\phi,j}} \in \mathbb{C}^\times$ は (モジュラーシンボル) 周期と呼ばれる複素数.

※ 上記の補間公式は，楕円保型形式の場合の Amice-Vélu, Manin, Višik, Mazur-Tate-Teitelbaum 等の $p$ 進 $L$ 関数と同じタイプの補間公式となっている.

## ■CM 体の基本設定

$F$ : $F^+$ の総虚二次拡大 (CM **体** と呼ばれる),　$c$ : $\mathrm{Gal}(F/F^+)$ の生成元 (“複素共役”)

以下,

(ord) $p$ の上にある $F^+$ の素イデアルは全て $F$ で分裂

を仮定する.

$\Sigma$ : $F$ の $p$ **通常 CM 型**；　つまり $F$ の $\overline{\mathbb{Q}}$ への $\mathbb{Q}$-埋め込み全体の集合 $I_F$ の部分集合で,

$$\Sigma \sqcup \Sigma^c = I_F \quad \text{かつ} \quad \Sigma_p \sqcup \Sigma_p^c = \{p \text{ 上の } F \text{ の素イデアル}\}$$

$$\text{但し } \Sigma_p = \{F \xrightarrow{\sigma} \overline{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\iota_p} \overline{\mathbb{Q}}_p \text{ が誘導する } p \text{ 上の } F \text{ の素イデアル} \mid \sigma \in \Sigma\}$$

を満たすもの (仮定 (ord) から，$p$ 通常 CM 型はちょうど $2^{\sharp\{p \text{ 上の } F^+ \text{ の素イデアル}\}}$ 個存在する).

※ $\Sigma$ の元 $\sigma$ に対して，対応する $\Sigma^c$ の元 $\sigma \circ c$ を $\bar{\sigma}$ で表すこととする.

※ $\Sigma \xrightarrow{\sim} I_{F^+}; \sigma \mapsto \sigma|_{F^+}$ により $\Sigma$ と $I_{F^+}$ を同一視する.

### ■虚数乗法を持つヒルベルト尖点形式

$\eta\colon \mathbb{A}_F^\times/F^\times \to \mathbb{C}^\times$　導手 $\mathfrak{C}$, 無限型 $\mu(\in \mathbb{Z}[I_F])$ の $(A_0)$ 型量指標 größencharacter of type $(A_0)$ [即ち $\mu = \sum_{\sigma\in\Sigma}(\mu_\sigma\sigma + \mu_{\bar\sigma}\bar\sigma)$ と書くとき，$x_\infty = (x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma} \in (F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})^\times \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C}^\times)^\Sigma$ に対して

$$\eta_\infty(x_\infty) = x_\infty^{-\mu} := \prod_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma^{-\mu_\sigma}\bar{x}_\sigma^{-\mu_{\bar\sigma}}$$

が成立する ($\bar{x}_\sigma$ は $x_\sigma$ の通常の意味での複素共役)*9].

$\rightsquigarrow$ 大域類体論の相互写像を介して $\eta$ と対応する絶対ガロア群の連続指標を $\eta^{\mathrm{gal}}\colon G_F \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times$ で表す.

ここで $\boxed{\eta \text{ の無限型が } \Sigma\text{-}\textbf{許容的 } \Sigma\text{-}admissible}$, 即ち各 $\sigma \in \Sigma$ に対して $\underline{\mu_\sigma < \mu_{\bar\sigma}}$ が成り立つことを仮定.

$\kappa_1 = \sum_{\sigma\in\Sigma}\mu_\sigma\sigma|_{F^+} \in \mathbb{Z}[I_{F^+}]$, $\kappa_2 = \sum_{\sigma\in\Sigma}\mu_{\bar\sigma}\bar\sigma|_{F^+} \in \mathbb{Z}[I_{F^+}]$ とおく (但し $\bar\sigma = \sigma\circ c$).

$\rightsquigarrow$ 尖点的ヒルベルト原始形式 $\boxed{\vartheta(\eta)} \in S_{\kappa_1,\kappa_2}(\mathfrak{D}_{F/F^+}\mathcal{N}_{F/F^+}(\mathfrak{C}), \nu_{F/F^+}\eta|_{\mathbb{A}_{F^+}^\times}|\cdot|_{\mathbb{A}_{F^+}}; \overline{\mathbb{Q}})$ で，素イデアル $\mathfrak{l}$ でのフーリエ係数が

$$C(\mathfrak{l};\vartheta(\eta)) = \begin{cases} 0 & \mathfrak{l} \text{ が } F \text{ で惰性する場合,} \\ \eta(\mathfrak{L}) + \eta(\mathfrak{L}^c) & \mathfrak{l} \text{ が } F \text{ に於いて } \mathfrak{l} = \mathfrak{L}\mathfrak{L}^c \text{ と分解する場合} \end{cases}$$

となるものが存在 ($\underline{\eta \text{ のテータ持ち上げ}}$; 吉田敬之, Hervé Jacquet, Robert Langlands).

ここで $\nu_{F/F^+}\colon \mathbb{A}_{F^+}^\times/F^{+,\times} \to \mathbb{C}^\times$ は二次拡大 $F/F^+$ に付随する二次指標, $\mathfrak{D}_{F/F^+}$ は拡大 $F/F^+$ の相対判別式.

※ 殆ど全ての素イデアル $\mathfrak{l}$ に対して $C(\mathfrak{l};\vartheta(\eta)) = \nu_{F/F^+}(\mathfrak{l})C(\mathfrak{l};\vartheta(\eta))$ が成立.

逆にこの様な性質を持つ尖点的ヒルベルト原始形式は全て CM 体の $(A_0)$ 型量指標のテータ持ち上げとして表される.　($\rightsquigarrow$ CM 体 $F$ に依る "虚数乗法")

※ $\underline{\text{導手 } \mathfrak{C} \text{ が } \Sigma_p \text{ の各元と互いに素}}$ ならば，(ord) より $\vartheta(\eta)$ は $p$ **概通常形式** となる.

※ 本講演で主に扱われるヒルベルト尖点形式は $\vartheta(\eta)$ の $p$ 安定化*10 $\vartheta(\eta)^{p\text{-st}}$ である.

### ■CM 体の $p$ 進 $L$ 関数　(Nicholas Michael Katz [Katz78], 肥田晴三, Jacques Tilouine [HT93])

$F$ : (ord) を満たす $F^+$ の総虚二次拡大,　$\mathfrak{r}_F$ : $F$ の整数環,　$\Sigma$ : $p$ 通常 CM 型 (固定)

$\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_{F^+}$ : $F^+$ の絶対共役差積,　$D_{F^+}$ : $F^+$ の 絶対判別式

$\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}$ : $\mathbb{Q}_p$ の最大不分岐拡大の整数環 ($= W(\overline{\mathbb{F}}_p)$)

$\mathfrak{C} = \mathfrak{F}\mathfrak{F}_c\mathfrak{l}$ : $F$ の整イデアル ($\mathfrak{F}\mathfrak{F}_c$ は $F^+$ 上分裂する素イデアルの積, $\mathfrak{l}$ は $F^+$ 上惰性する素イデアルの積で, $\mathfrak{F}$ と $\mathfrak{F}_c$ は互いに素かつ $\mathfrak{F}_c^c \supseteq \mathfrak{F}$ となるような $\mathfrak{C}$ の分解を一つ選ぶ).

$F^\times$ の元 $\delta$ で

---

*9 このとき $\mu_\sigma + \mu_{\bar\sigma}$ は $\sigma \in \Sigma$ によらず一定値 $-w$ をとることが知られている.

*10 詳細は割愛するが，大体 "$p$ の外でのヘッケ固有値を変えずにレベルが $p$ で割れるようにする操作" のこと.

($1_\delta$) $\delta$ は純虚数 (つまり $\delta^c = -\delta$) かつ各 $\sigma \in \Sigma$ に対して $\mathrm{Im}(\sigma(\delta))$ は正;

($2_\delta$) 或る $p\mathfrak{C}\mathfrak{C}^c$ と素な $F^+$ の分数イデアル $\mathfrak{c}$ が存在して，$\langle u, v\rangle_\delta = (uv^c - u^c v)/2\delta$ で定義される $\mathfrak{r}_F$ 上の交代形式が同型 $\mathfrak{r}_F \wedge_{\mathfrak{r}_{F^+}} \mathfrak{r}_F \xrightarrow{\sim} \mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{c}^{-1}$ を誘導する (即ち c-偏極を誘導する)

を満たすものをとる．このとき，$\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}[[\mathrm{Gal}(F_{\mathfrak{C}p^\infty}/F)]]$ ($F_{\mathfrak{C}p^\infty}$ は $F$ に対する法 $\mathfrak{C}p^\infty$ の射類体) の元 $\mathscr{L}_p(F)$ で，以下の **補間性質** で特徴付けられるものが唯一つ存在する;

$$\frac{\lambda^{\mathrm{gal}}(\mathscr{L}_p(F))}{\Omega_{\mathrm{CM},p}^{w\mathsf{t}+2\mathsf{r}}} = (\mathfrak{r}_F^\times : \mathfrak{r}_{F^+}^\times) W_p(\lambda) \frac{(-1)^{wd}(2\pi)^{|\mathsf{r}|}\prod_{\sigma\in\Sigma}\Gamma(k+r_\sigma)}{\sqrt{|D_{F^+}|}\prod_{\sigma\in\Sigma}\mathrm{Im}(\sigma(2\delta))^{r_\sigma}}$$
$$\times \prod_{\mathfrak{L}|\mathfrak{C}}(1-\lambda(\mathfrak{L})) \prod_{\mathfrak{P}\in\Sigma_p}\{(1-\lambda(\mathfrak{P}^c))(1-\check{\lambda}(\mathfrak{P}^c))\} \frac{L(0;\lambda)}{\Omega_{\mathrm{CM},\infty}^{w\mathsf{t}+2\mathsf{r}}}$$

但し $\lambda\colon \mathbb{A}_F^\times/F^\times \to \mathbb{C}^\times$ は導手が $\mathfrak{C}p^\infty$ を割るような $(A_0)$ 型量指標で以下の 2 条件を満たすようなものを任意に動くものとする;

(i) $\lambda$ の導手は $\mathfrak{F}$ の全ての素因子で割り切れる;

(ii) $\lambda$ の無限型を $-w\mathsf{t} - \sum_{\sigma\in\Sigma} r_\sigma(\sigma - \bar{\sigma})$ ($\mathsf{t} = \sum_{\sigma\in\Sigma}\sigma$) と表したとき，$w$ 及び $r_\sigma$ ($\sigma \in \Sigma$) が

$$(w \geq 1 \text{ かつ } r_\sigma \geq 0 \quad \forall\sigma\in\Sigma) \quad \text{または} \quad (w \leq 1 \text{ かつ } w + r_\sigma - 1 \geq 0 \quad \forall\sigma\in\Sigma)$$

を満たす.

$\check{\lambda}$ は $\lambda(x)\check{\lambda}(x^c) = |x|_{\mathbb{A}_F}$ で定義される $\lambda$ の双対指標.

また，各 $\mathfrak{P} \in \Sigma_p$ に対し局所体 $F_\mathfrak{P}$ の一意化元を $\varpi_\mathfrak{P}$，$\lambda$ の導手に於ける $\mathfrak{P}$ の指数を $e(\mathfrak{P})$ と書くとき，局所因子 $W_p(\lambda)$ は

$$W_p(\lambda) = \prod_{\mathfrak{P}\in\Sigma_p} \mathcal{N}\mathfrak{P}^{-e(\mathfrak{P})}\lambda_\mathfrak{P}(\varpi_\mathfrak{P}^{-e(\mathfrak{P})}) \sum_{x\in(\mathfrak{r}_F/\mathfrak{P}^{e(\mathfrak{P})})^\times} \lambda_\mathfrak{P}(x)\mathbf{e}_\mathfrak{P}(\varpi_\mathfrak{P}^{-e(\mathfrak{P})}(2\delta)_\mathfrak{P}^{-1}x)$$

で定義される ($\mathbf{e}_\mathfrak{P}$ は $F_\mathfrak{P}$ の標準的な加法的指標)．但し $(2\delta)_\mathfrak{P}$ は $2\delta$ の $F_\mathfrak{P}$ での像を表す．また，$\Omega_{\mathrm{CM},p} \in (\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}} \otimes_\mathbb{Z} \mathfrak{r}_{F^+})^\times$, $\Omega_{\mathrm{CM},\infty} \in (\mathbb{C} \otimes_\mathbb{Q} F^+)^\times$ はそれぞれカッツにより定義された $p$ 進 / 複素 CM 周期．なお，補間性質の等式では $\mathsf{r} = \sum_{\sigma\in\Sigma} r_\sigma\sigma$ の表記を用いた.

※ $p$ 進 $L$ 関数 $\mathscr{L}_p(F)$ は上記の ($1_\delta$), ($2_\delta$) を満たす $\delta$ の取り方に依存するが，$\delta$ を取り替えた際の影響は全て明示的に書き下せる.

## 参考文献


[Di13] Mladen Dimitrov, *Automorphic symbols, p-adic L-functions and ordinary cohomology of Hilbert modular varieties*, Amer. J. Math., **135**, no. 4 (2013).

[Gr06] Ralph Greenberg, *On the structure of certain Galois cohomology groups*, Doc. Math. Extra Vol., (4) *John H. Coates Sixtieth' Birthday*, 335–391 (2006).

[Gr10] Ralph Greenberg, *Surjectivity of the global-to-local map defining a Selmer group*, Kyoto J. of Math., Vol. **50**, No. 4, 853–888 (2010).

[Gr12] Ralph Greenberg, *On the structure of Selmer groups*, preprint available at his webpage `http://www.math.washington.edu/~greenber/research.html` (2012).

[HT93] Haruzo Hida and Jacques Tilouine, *Anticyclotomic Katz p-adic L-functions and congruence modules*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **26**, no. 2, 189–259 (1993).

[Katz78] Nicholas Michael Katz, *p-adic L-functions for CM fields*, Invent. Math., **49**, 199–297 (1978).

[Och12] Tadashi Ochiai, *Several variable p-adic L-functions for Hida families of Hilbert modular forms*, Doc. Math., **17**, 807–849 (2012).