タット多項式とコンウェイの問題の高次数化

三枝崎剛（早稲田大学）

2021/4/19

早稲田整数論セミナー

<u>文献</u>
- arXiv: 1810.04878
- arXiv: 2007.15089
- このノートは整数論セミナーのページにあります

目次

①

定義 E：有限集合，$\mathcal{I} \subset 2^E$

$M = (E, \mathcal{I})$ がマトロイド $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(I) $J_1 \in \mathcal{I}$, $J_2 \subset J_1 \Rightarrow J_2 \in \mathcal{I}$

(II) $J_1, J_2 \in \mathcal{I}$, $|J_1| < |J_2| \Rightarrow \exists e \in J_2 \setminus J_1$, $J_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

注 (1) $\mathcal{I}$ 独立集合族

(2) M のランク $r(M) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 極大独立集合のサイズ

(3) M のベース $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 極大独立集合 （$\mathcal{B}$ = ベースの集合）

(4) $\forall A \subset E$, A のランク $r(A) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ （$M = (E, \mathcal{B})$）

A に含まれる独立集合の最大サイズ.

例（ベクトルマトロイド）

$A \in M_{k\times n}(\mathbb{F}_q)$

$$\begin{cases} E = \{1, \cdots, n\} \\ I = \{ J \subset E \mid J \text{ に対応する列ベクトルが1次独立} \} \end{cases}$$

$\Rightarrow (E, I)$ マトロイド構造を持つ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

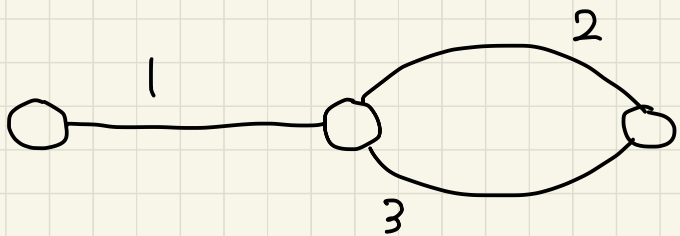
$$\begin{cases} E = \{1, 2, 3\} \\ I = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\} \} \end{cases}$$

例（サイクルマトロイド）

G：無向グラフ

$$\begin{cases} E: \text{辺集合} \\ I: \{ J \subset E \mid J \text{はサイクルを持たない} \} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (E, I) はマトロイド構造を持つ.



$E = \{1, 2, 3\}$

$I = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$

例 (一様マトロイド, $U_{r,n}$)

$$\begin{cases} E = \{1, 2, \cdots, n\} \\ I = \{J \subset E \mid |J| \leq r\} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $U_{r,n} = (E, I)$ はマトロイド

$U_{2,4}$: $\begin{cases} E = \{1, 2, 3, 4\} \\ I = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \\ \qquad \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\} \end{cases}$

マトロイドの同型・同値

① $M=(E, \mathcal{I})$、$M'=(E', \mathcal{I}')$ が同型 $(M \cong M')$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \varphi : E \to E'$ 全単射

$\forall J \in \mathcal{I}$, $\forall J' \in \mathcal{I}'$

$\varphi(J) \in \mathcal{I}'$, $\varphi^{-1}(J') \in \mathcal{I}$

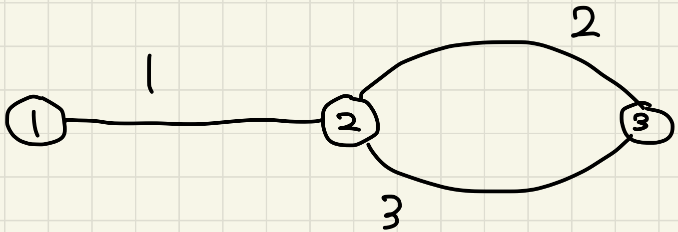
② M ―――――― 〃 ―――――― が同値 $(M \cong M')$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $M \cong M'$ or $M \cong (M')^*$ (M'の双対マトロイド)

$(M')^* = (E', \mathcal{B}^*)$, $\mathcal{B}^* := \{ E' \setminus B \mid B \in \mathcal{B}' \}$

③ $M \cong M' \Rightarrow M \cong M'$

サイクルマトロイド ⊂ ベクトルマトロイド



接続行列

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\
\begin{matrix} ① \\ ② \\ ③ \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

⇝ サイクルマトロイドと同型なベクトルマトロイドを得る。

定義 (タット多項式)

$M=(E,\mathcal{I})$ マトロイド

$$T(M;x,y)=\sum_{A\subset E}(x-1)^{r(E)-r(A)}(y-1)^{|A|-r(A)}$$

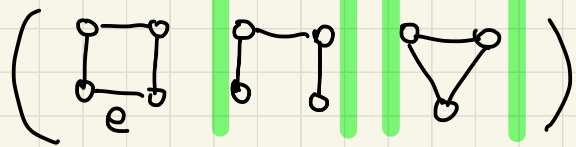
例 $U_{3,6}$: $\begin{cases} E=\{1,2,3,4,5,6\} \\ \mathcal{I}=\{\emptyset,\{1\},\cdots\{12\},\cdots\{123\},\cdots\} \end{cases}$

$$T(U_{3,6})=\sum_{i=0}^{3}\binom{6}{i}(x-1)^{3-i}+\sum_{i=4}^{6}\binom{6}{i}(y-1)^{i-3}$$

特殊値 $\begin{cases} A\in\mathcal{B} & r(A)=r(E) \\ A\in\mathcal{I} & r(A)=|A| \end{cases}$ $T(M;1,1)=|\mathcal{B}|$

② **定義** (グラフ理論でタット多項式, 除去, 縮約)

M : サイクルマトロイド



(1) $T(\emptyset ; x, y) = 1$

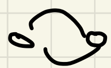
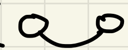
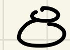
(2) e がループなら $T(M ; x, y) = y\,T(M \setminus e ; x, y)$

(3) e が橋なら $T(M ; x, y) = x\,T(M / e ; x, y)$

(4) e がループでも橋でもないとき

$$T(M ; x, y) = T(M \setminus e ; x, y) + T(M / e ; x, y)$$

例

 $=$ x  $=$ $x($  $+$  $)$

$$= x^2 + y \longmapsto \lambda(\lambda - 1)^2$$

定理 $\chi(G ; \lambda) = (-1)^{|V| - k(G)} \lambda^{k(G)} T(G ; 1 - \lambda, 0)$

符号理論とタット多項式

M_A: $A \in M_{k \times n}(\mathbb{F}_2)$ から得られるベクトルマトロイド

$$C(M_A) := \{ xA \mid x \in \mathbb{F}_2^k \} < \mathbb{F}_2^n$$

↑ $\mathbb{F}_2$ 上の符号。

定義 $C < \mathbb{F}_2^n$

$$W_C(x, y) = \sum_{c \in C} x^{n - wt(c)} y^{wt(c)} \quad \text{(重さ多項式)}$$

定理 (Greene, (1976)) $C := C(M_A)$

$$W_C(x, y) = y^{n - \dim(C)} (x-y)^{\dim(C)} T\left(M_A; \frac{x+y}{x-y}, \frac{x}{y}\right)$$

格子とタット多項式

$$C(M_A) := \{\ xA \mid x \in \mathbb{F}_2^k \} < \mathbb{F}_2^n$$

構成法A

$$L := L(C(M_A)) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{ x \in \mathbb{Z}^n \mid x \bmod 2 \in C(M_A) \}$$

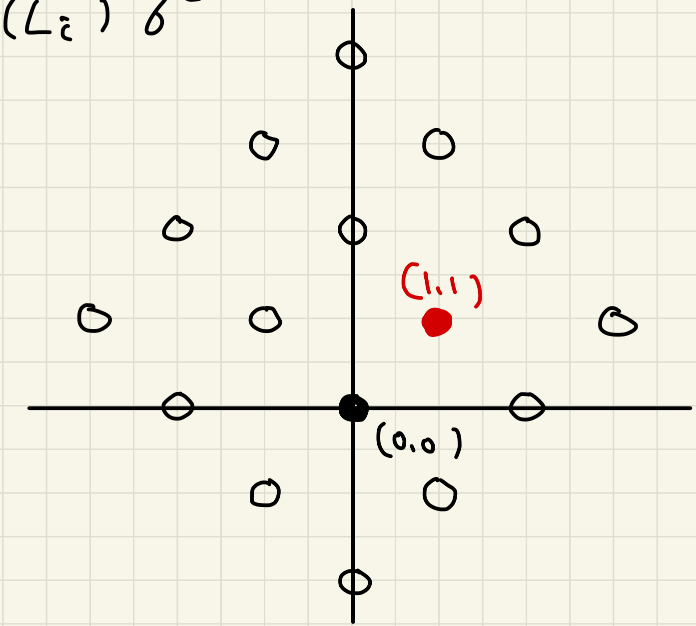
$$\vartheta_L(q) := \sum_{x \in L} q^{(x,x)} = \sum_{i=0}^{\infty} \#(L_i)\, q^i$$

例 $A = [1,1]$

$C(M_A) = \{(0,0), (1,1)\}$

$L = \mathbb{Z}^2$

$$\vartheta_{\mathbb{Z}^2} = 1 + 4q + 4q^2 + \cdots$$



定理（格子版 Greene (1976)，テータ写像）

$$\vartheta_{L(C(M_A))} = W_{C(M_A)}(\vartheta_3, \vartheta_2)$$

$$= y^{n-\dim C}(x-y)^{\dim C} T\left(M_A ; \frac{\vartheta_3+\vartheta_2}{\vartheta_3-\vartheta_2}, \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\right)$$

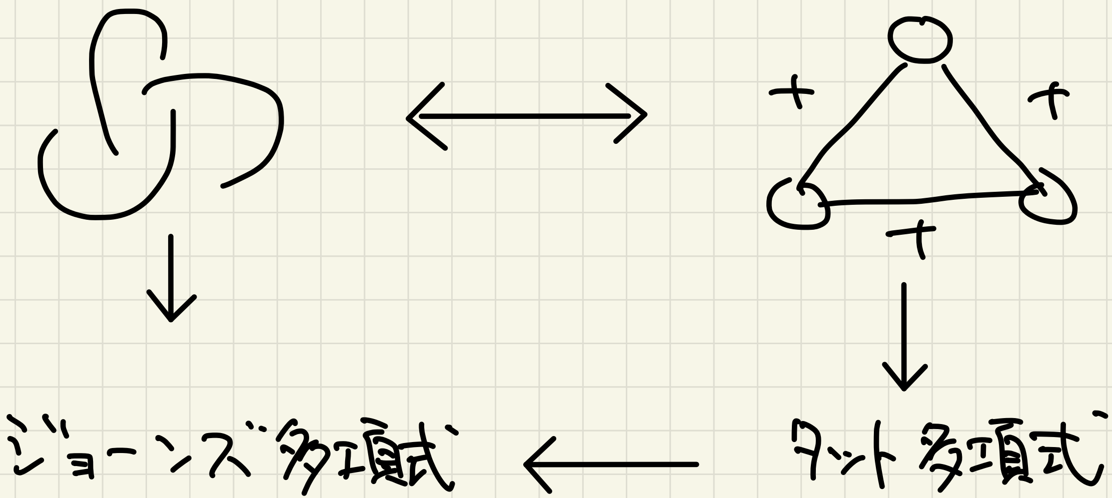
例 $A = \left[\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ I & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$, $C(M_A)$: Hamming code

$L(C(M_A)) = E_8$-格子

$$E_4 = \vartheta_2^4 (\vartheta_3 - \vartheta_2)^4 \sum_{A \subset E} (\vartheta_3 - 1)^{4-r(A)} (\vartheta_2 - 1)^{|A|-r(A)}$$

重さ4の Eisenstein 級数

結び目とタット多項式



③ <u>定理</u> タット多項式

$$T(M; x, y) = \sum_{A \subset E} (x-1)^{r(E) - r(A)} (y-1)^{|A| - r(A)}$$

は マトロイドの不変量：

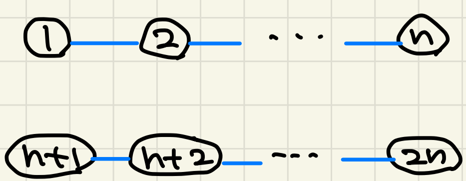
$$M \simeq M' \implies T(M) = T(M')$$

注意　タット多項式は完全不変量でない。

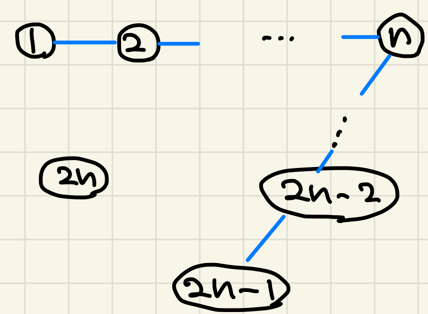
$$M \simeq M' \quad \begin{array}{c}\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow\end{array} \quad T(M) = T(M')$$

例1　$U_{n,2n} = (E = \{1, 2, \cdots, 2n\}, \mathcal{I})$

$$\begin{cases} R_{2n} = (E, \mathcal{I} \setminus \{\{1, 2, \cdots, n\}, \{n+1, \cdots, 2n\}\}) \\ Q_{2n} = (E, \mathcal{I} \setminus \{\{1, 2, \cdots, n\}, \{n, \cdots, 2n-1\}\}) \end{cases}$$



R_{2n}

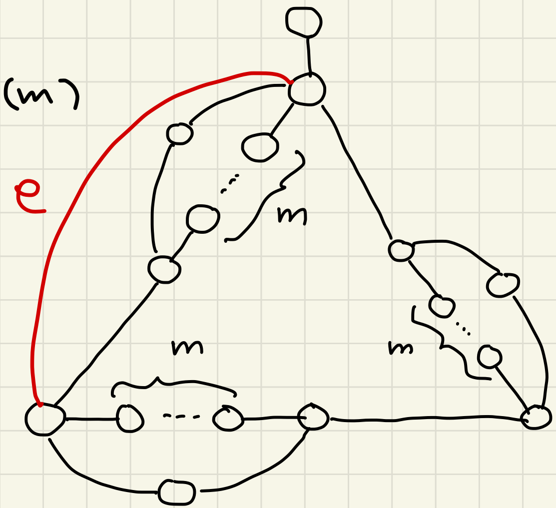


Q_{2n}

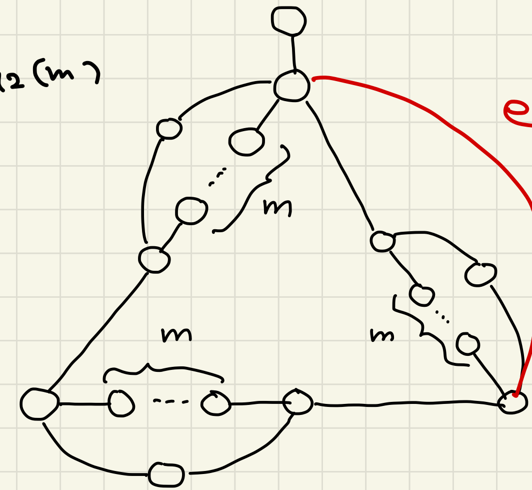
$R_{2n} \not\simeq Q_{2n}$　しかし　$T(R_{2n}) = T(Q_{2n})$

例 (Bollobás–Pebody–Riordan (2000))

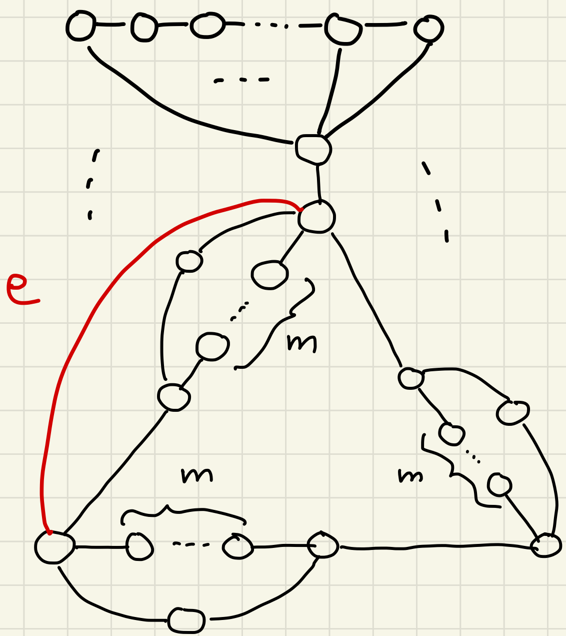
$G_1(m)$

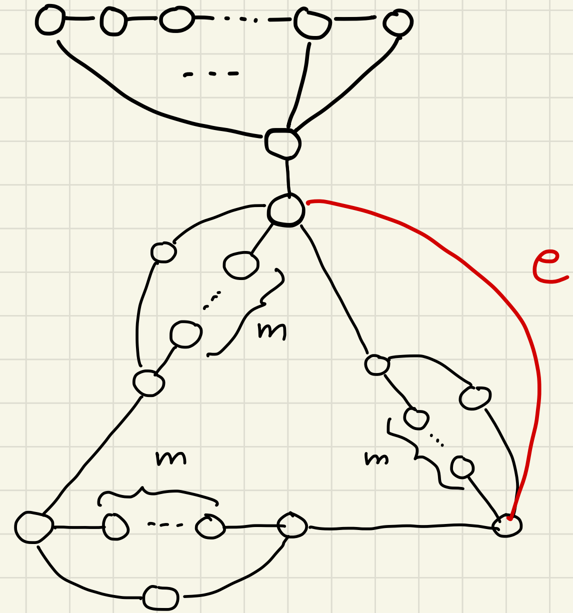


$G_2(m)$



$G_1(m,n) = G_1(m) * P_n$ $\qquad$ $G_2(m,n) = G_1(m) * P_n$





$G_1(m,n) \not\cong G_2(m,n)$, $T(G_1(m,n)) = T(G_2(m,n))$

$$\left(\begin{array}{l} \because\ G_1(m,n) \backslash e = G_2(m,n) \backslash e \\ \quad\ G_1(m,n) / e = G_2(m,n) / e \end{array} \right)$$

Tutte polynomials of genus g, $g \in \mathbb{N}$

Tutte polynomials of genus 1:

$$T^{(1)}(M;x,y) := T(M;x,y) := \sum_{A\subset E}(x-1)^{r(E)-r(A)}(y-1)^{|A|-r(A)}.$$

Definition (Tutte polynomials of genus 2)

Tutte polynomials of genus 2:

$$\begin{aligned}
&T^{(2)}(M;x_1,x_2,x_{\cap\{1,2\}},x_{\cup\{1,2\}},y_1,y_2,y_{\cap\{1,2\}},y_{\cup\{1,2\}})\\
&= \sum_{A_1,A_2\subset E}(x_1-1)^{r(E)-r(A_1)}(x_2-1)^{r(E)-r(A_2)}\\
&\qquad (x_{\cap\{1,2\}}-1)^{r(E)-r(A_1\cap A_2)}(x_{\cup\{1,2\}}-1)^{r(E)-r(A_1\cup A_2)}\\
&\qquad (y_1-1)^{|A_1|-r(A_1)}(y_2-1)^{|A_2|-r(A_2)}\\
&\qquad (y_{\cap\{1,2\}}-1)^{|A_1\cap A_2|-r(A_1\cap A_2)}(y_{\cup\{1,2\}}-1)^{|A_1\cup A_2|-r(A_1\cup A_2)}.
\end{aligned}$$

Tutte polynomials of genus g, $g \in \mathbb{N}$

Definition (Tutte polynomials of genus 3)

Tutte polynomials of genus 3:

$$T^{(3)}(M) = \sum_{A_1, A_2, A_3 \subset E} (x_1 - 1)^{r(E)-r(A_1)}(x_2 - 1)^{r(E)-r(A_2)}(x_3 - 1)^{r(E)-r(A_3)}$$
$$(x_{\cap\{1,2\}} - 1)^{r(E)-r(A_1\cap A_2)}(x_{\cap\{1,3\}} - 1)^{r(E)-r(A_1\cap A_3)}$$
$$(x_{\cap\{2,3\}} - 1)^{r(E)-r(A_2\cap A_3)}(x_{\cup\{1,2\}} - 1)^{r(E)-r(A_1\cup A_2)}$$
$$(x_{\cup\{1,3\}} - 1)^{r(E)-r(A_1\cup A_3)}(x_{\cup\{2,3\}} - 1)^{r(E)-r(A_2\cup A_3)}$$
$$(y_1 - 1)^{|A_1|-r(A_1)}(y_2 - 1)^{|A_2|-r(A_2)}(y_3 - 1)^{|A_3|-r(A_3)}$$
$$(y_{\cap\{1,2\}} - 1)^{|A_1\cap A_2|-r(A_1\cap A_2)}(y_{\cap\{1,3\}} - 1)^{|A_1\cap A_3|-r(A_1\cap A_3)}$$
$$(y_{\cap\{2,3\}} - 1)^{|A_2\cap A_3|-r(A_2\cap A_3)}(y_{\cup\{1,2\}} - 1)^{|A_1\cup A_2|-r(A_1\cup A_2)}$$
$$(y_{\cup\{1,3\}} - 1)^{|A_1\cup A_3|-r(A_1\cup A_3)}(y_{\cup\{2,3\}} - 1)^{|A_2\cup A_3|-r(A_2\cup A_3)}.$$

Tutte polynomials of genus g, $g \in \mathbb{N}$

Definition (Tutte polynomials of genus g)

$\Lambda_1 := \{1, \ldots, g\}$, $\Lambda_2 := \binom{\Lambda_1}{2}$.

Tutte polynomials of genus g: $y_{\cap\lambda_2}, y_{\cup\lambda_2}$

$$
\begin{aligned}
&T^{(g)}(M; x_{\lambda_1}, y_{\lambda_1}, x_{\cap\lambda_2}, x_{\cup\lambda_2} : \lambda_1 \in \Lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_2) \\
&:= \sum_{A_1,\ldots,A_g \subset E} \prod_{\lambda \in \Lambda_1} (x_\lambda - 1)^{r(M)-r(A_\lambda)} (y_\lambda - 1)^{|A_\lambda| - r(A_\lambda)} \\
&\times \prod_{\lambda \in \Lambda_2} (x_{\cap(\lambda)} - 1)^{r(M)-r(A_{\cap(\lambda)})} (y_{\cap(\lambda)} - 1)^{|A_{\cap(\lambda)}| - r(A_{\cap(\lambda)})} \\
&\times \prod_{\lambda \in \Lambda_2} (x_{\cup(\lambda)} - 1)^{r(M)-r(A_{\cup(\lambda)})} (y_{\cup(\lambda)} - 1)^{|A_{\cup(\lambda)}| - r(A_{\cup(\lambda)})}
\end{aligned}
$$

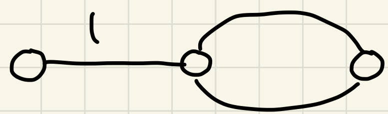
- $\sharp$ var.$= 2g + 4\binom{g}{2} = 2g^2$.

定理 $\{T^{(g)}\}_{g=1}^{\infty}$ はマトロイドの完全不変量

定義: マトロイドベースグラフ $BG(M) = (V, E)$

$$\begin{cases} V = M\text{のベースの集合} = \mathcal{B} \\ \underset{(*)}{B \sim B'} \in E \iff B \setminus \{x\} = B' \setminus \{y\} \end{cases}$$

例



ベース

$V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{12\}, \{13\}\}$

$BG(M)$: $\{12\}$ — $\{13\}$

定理 (Holzmann-Norton-Tobey (1973))

$$M \cong M' \iff BG(M) \simeq BG(M')$$

定理の証明　$\{T^{(g)}\}_{g=1}^{\infty}$ が $BG(M)$ を決定することを示す。

① $|\mathcal{B}| = g = T^{(1)}(M;1,1) = T(M;1,1)$

② $T^{(g)} = \sum_{A_1,\cdots,A_g \subset E} \prod_{i=1}^{g} (x_i-1)^{r(M)-r(A_i)} (y_i-1)^{|A_i|-r(A_i)}$

$\prod_{\lambda \in \Lambda_2} (x_{\cap\lambda}-1)^{r(M)-r(A_{\cap\lambda})} (y_{\cap\lambda}-1)^{|A_{\cap\lambda}|-r(A_{\cap r})}$

$\prod_{\lambda \in \Lambda_2} (x_{\cup\lambda}-1)^{r(M)-r(A_{\cup\lambda})} (y_{\cup\lambda}-1)^{|A_{\cup\lambda}|-r(A_{\cup r})}$

$\mathcal{B} = \{A_1, \cdots, A_g\}$ が作る項を見つける。

$$\begin{cases} (x_i-1)^{r(M)-r(A_i)} (y_i-1)^{|A_i|-r(A_i)} = 1 \iff A_i \in \mathcal{B} \\ (y_{\cup\{i,j\}}-1)^{|A_i \cup A_j|-r(A_i \cup A_j)} \neq 1 \ (\iff A_i \neq A_j) \end{cases}$$

③

$$\boxed{\begin{aligned} T^{(g)} = \sum_{A_1,\cdots,A_g \subset E} & \prod_{i=1}^{g} (x_i - 1)^{r(M)-r(A_i)} (y_i - 1)^{|A_i| - r(A_i)} \\ & \prod_{\lambda \in \Lambda_2} (x_{\cap\lambda} - 1)^{r(M)-r(A_{\cap\lambda})} (y_{\cap\lambda} - 1)^{|A_{\cap\lambda}| - r(A_{\cap r})} \\ & \prod_{\lambda \in \Lambda_2} (x_{\cup\lambda} - 1)^{r(M)-r(A_{\cup\lambda})} (y_{\cup\lambda} - 1)^{|A_{\cup\lambda}| - r(A_{\cup r})} \end{aligned}}$$

②の中で $A_i \setminus \{x\} = A_j \setminus \{y\}$ をみたす項をさがす.

$$\left\{ \begin{aligned} (x_{\cap\{i,j\}} - 1)^{r(M) - r(A_i \cap A_j)} &= x_{\cap\{i,j\}} - 1 \\ (y_{\cup\{i,j\}} - 1)^{|A_i \cup A_j| - r(A_i \cup A_j)} &= y_{\cup\{i,j\}} - 1 \end{aligned} \right. \iff i \sim j$$

④

$$\left\{ \begin{aligned} V &= \{1, \cdots, g\} \\ E &= \{ i \sim j \mid i, j \in V \} \end{aligned} \right. \Longrightarrow BG(M) = (V, E)$$

//

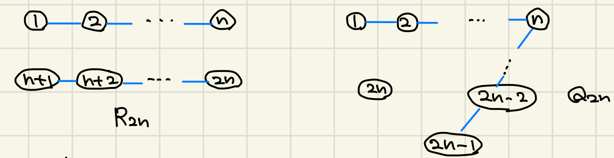
注意 ① 証明から、$T^{(g)}$ は $|\mathcal{B}| \leq g$ のマトロイドの完全不変量

② $T^{(2)}(R_{2n}) \neq T^{(2)}(Q_{2n})$

$\left(|\mathcal{B}(R_{2n})| = |\mathcal{B}(Q_{2n})| = \binom{2n}{n} - 2 \right)$

例 $U_{n,2n} = (E = \{1, 2, \cdots, 2n\}, \mathcal{I})$

$$\begin{cases} R_{2n} = (E, \mathcal{I} \setminus \{\{1, 2, \cdots, n\}, \{n+1, \cdots, 2n\}\}) \\ Q_{2n} = (E, \mathcal{I} \setminus \{\{1, 2, \cdots, n\}, \{n, \cdots, 2n-1\}\}) \end{cases}$$



$R_{2n} \not\cong Q_{2n}$ しかし $T(R_{2n}) = T(Q_{2n})$

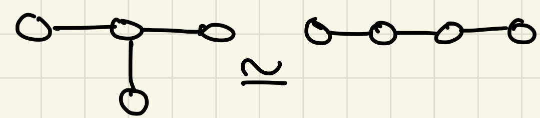
③ $T^{(2)}(G_1(m, n)) \neq T^{(2)}(G_2(m, n))$

④ いくらでも大きい g に対して

$M_g \not\cong M_g'$ かつ $T^{(g)}(M_g) = T^{(g)}(M_g')$

となる例の構成.

⑤ $T^{(g)}$ は木を区別しない。



$T^{(2)}$ は3連結グラフの完全不変量か?

Tutte polynomials of genus g, $g \in \mathbb{N}$

6 Tutte polynomials of genus 1:

$$T^{(1)}(M;x,y) := T(M;x,y) := \sum_{A \subset E} (x-1)^{r(E)-r(A)}(y-1)^{|A|-r(A)}.$$

Definition (Tutte polynomials of genus 2)

Tutte polynomials of genus 2:

$$T^{(2)}(M; x_1, x_2, x_{\cap\{1,2\}}, x_{\cup\{1,2\}}, y_1, y_2, y_{\cap\{1,2\}}, y_{\cup\{1,2\}})$$

$$= \sum_{A_1, A_2 \subset E} (x_1 - 1)^{r(E)-r(A_1)}(x_2 - 1)^{r(E)-r(A_2)}$$

$$(x_{\cap\{1,2\}} - 1)^{r(E)-r(A_1 \cap A_2)}(x_{\cup\{1,2\}} - 1)^{r(E)-r(A_1 \cup A_2)}$$

$$(y_1 - 1)^{|A_1|-r(A_1)}(y_2 - 1)^{|A_2|-r(A_2)}$$

$$(y_{\cap\{1,2\}} - 1)^{|A_1 \cap A_2|-r(A_1 \cap A_2)}(y_{\cup\{1,2\}} - 1)^{|A_1 \cup A_2|-r(A_1 \cup A_2)}.$$

$$T(M;x,y) = \frac{1}{2^{|E|}} T^{(2)}(M; x, 2,2,2, y, 2,2,2)$$

定理

$$T(M;x,y) = T^{(2)}(M;2,2,0,x,2,2,0,y)$$
$$= T^{(2)}(M;2,2,x,0,2,2,y,0)$$
$$= T^{(2)}(M;2,2,0,x,2,2,y,0)$$

系

$$\vartheta_{L(C(M_A))} = w_{C(M_A)}(\vartheta_3,\vartheta_2) \underset{\text{Greene}}{=} \vartheta_2^{\,n-\dim(C)}(\vartheta_3-\vartheta_2)^{\dim C}\, T^{(2)}\left(M_A;2,2,0,\frac{\vartheta_3+\vartheta_2}{\vartheta_3-\vartheta_2},2,2,0,\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\right)$$

特に $A = \left[\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 \\ I & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]_{\mathbb{F}_2}$ をとると、

$L(C(M_A)) = E_8$ 格子.

$$E_4 = \vartheta_2^4(\vartheta_3-\vartheta_2)^4 \sum_{A_1,A_2\subset E} (-1)^{4-r(A_1\cap A_2)}\left(\frac{\vartheta_3+\vartheta_2}{\vartheta_3-\vartheta_2}-1\right)^{4-r(A_1\cup A_2)} (-1)^{|A_1\cap A_2|-r(A_1\cap A_2)}\left(\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}-1\right)^{|A_1\cup A_2|-r(A_1\cup A_2)}$$

重さ4の Eisenstein 級数

④ コンウェイの問題

整数格子 $L_1, L_2 (\subset \mathbb{R}^n)$ が同型 $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists A \in O(n)$, $AL_1 = L_2$

<u>問題</u>（コンウェイ著，素数が香り形がきこえる）

$L_1 \not\cong L_2$ かつ $\vartheta_{L_1} = \vartheta_{L_2}$ となるものを見つけよ。

<u>例1</u>（Conway-Sloane (1992)）

$e_1 = \frac{1}{\sqrt{12}}(1,0,0,0)$, $e_2 = \frac{7}{\sqrt{12}}(0,1,0,0)$, $e_3 = \frac{13}{\sqrt{12}}(0,0,1,0)$, $e_4 = \frac{19}{\sqrt{12}}(0,0,0,1)$

$$L_1 : \begin{cases} u_1 = 3e_1 - e_2 - e_3 - e_4 \\ u_2 = e_1 + 3e_2 + e_3 - e_4 \\ u_3 = e_1 - e_2 + 3e_3 + e_4 \\ u_4 = e_1 + e_2 - e_3 + 3e_4 \end{cases}, \quad L_2 : \begin{cases} v_1 = -3e_1 - e_2 - e_3 - e_4 \\ v_2 = e_1 - 3e_2 + e_3 - e_4 \\ v_3 = e_1 - e_2 - 3e_3 + e_4 \\ v_4 = e_1 + e_2 - e_3 - 3e_4 \end{cases}$$

<u>注意</u>（Conway-Sloane (1992)）$\nexists$ $n \leq 3$.

例 (Milnor)

ランク16 Type II 格子 $E_8^2 \not\cong D_{16}^+$

$$\vartheta_{E_8^2} = \vartheta_{D_{16}^+} = E_4^2 = (1+240q^2+\cdots)^2$$

重さ4の Eisenstein 級数

マトロイドを用いた解釈

$$\begin{array}{ccccc}
\text{ベクトルマトロイド} & \longrightarrow & \text{符号} & \xrightarrow{\text{構成法A}} & \text{格子} \\
\hline
e_8^2 & \longrightarrow & e_8^2 & \longrightarrow & E_8^2 \\
\not\cong & & \not\cong & & \not\cong \\
d_{16}^+ & \longrightarrow & d_{16}^+ & \longrightarrow & D_{16}^+ \\
\hline
\end{array}$$

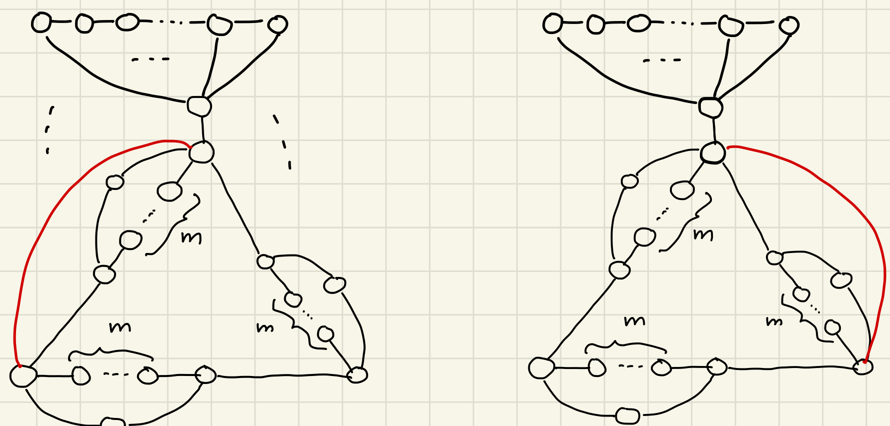
$$T(e_8^2) = T(d_{16}^+) \xrightarrow[\text{(Greene)}]{} W_{e_8^2} = W_{d_{16}^+} \xrightarrow[\text{(テータ写像)}]{} \vartheta_{E_8^2} = \vartheta_{D_{16}^+}$$

定理 $d \in \{24, 27, 30, 33, 35, 36, 38, 39, 41, 42\}$
$\cup \{i \in \mathbb{Z} \mid i \geq 44\}$ とおく。

ランク d 格子でコンウェイの問題の例が構成できる。

証明

$G_1(m,n) = G_1(m) * P_n$ $\qquad$ $G_2(m,n) = G_1(m) * P_n$



$G_1(m,n) \not\cong G_2(m,n)$, $T(G_1(m,n)) = T(G_2(m,n))$

$$
\begin{tikzcd}
\text{サイクルマトロイド} & \text{符号} & \text{格子} \\
G_1(m,n) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\not\cong"] & G_1(m,n) \arrow[r, "\text{構成法A}"] \arrow[d, phantom, "\not\cong"] & L(G_1(m,n)) \arrow[d, phantom, "\not\cong"] \\
G_2(m,n) \arrow[r] & G_2(m,n) \arrow[r] & L_2(G_1(m,n))
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{array}{c}
3m+11n+24 \\
\begin{bmatrix} & & \\ & * & \\ & & \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{tikzcd}
T(G_1(m,n)) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\parallel"] \arrow[dr, phantom, "(\text{Greene})"] & W_{G_1(m,n)} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\parallel"] \arrow[dr, phantom, "(\text{テータ写像})"] & \vartheta_{L(G_1(m,n))} \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
T(G_2(m,n)) \arrow[r] & W_{G_2(m,n)} \arrow[r] & \vartheta_{L(G_2(m,n))}
\end{tikzcd}
$$

$3m+11n+24$ は $\{24, 27, 30, 33, 35, 36, 38, 39, 41, 42\}$

$\cup \{i \in \mathbb{Z} \mid i \geq 44\}$ を表現する。//

⑤ 高次数化に関する問題について

定義 符号 C の次数 g の重み多項式

$$W_C^{(g)}(x_a : a \in \mathbb{F}_2^g) = \sum_{c_1 \cdots c_g \in C} \prod_{a \in \mathbb{F}_2^g} x_a^{n_a(c_1, \cdots, c_g)}$$

$$\begin{array}{ccc} c_1 & \cdots & c_g \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \begin{bmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1n} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} c_{g1} \\ \vdots \\ c_{gn} \end{bmatrix} \end{array}$$

ここで、$n_a(c_1, \cdots, c_g) = \#\{ i \mid a = (c_{1i} \cdots c_{gi}) \}$

例 $C = \{(00)(11)\} < \mathbb{F}_2^2$

$$(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \}$$

$$W_C^{(2)} = x_{00}^2 + x_{01}^2 + x_{10}^2 + x_{11}^2$$

定義 格子 L の次数 g のテータ級数

$$\vartheta_L^{(g)}(\tau) := \sum_{x_1,\cdots,x_g\in L} \exp\left(\pi i\, \mathrm{tr}\left(\tau\left((x_j, x_k)\right)_{1\leq j,k\leq g}\right)\right),$$

ここで $\tau \in \mathbb{H}_g := \{\tau \in M_g(\mathbb{C}) \mid \tau = {}^t\tau,\ \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$

定理 (Runge (1996), 高次数テータ写像)

$$\vartheta_{L(C)}^{(g)}(\tau) = W_C^{(g)}\left(\theta_a(\tau) : a \in \mathbb{F}_2^g\right)$$

ここで, θ_a 次数 g のテータ関数.

問題 次の図式をみたすタット多項式の高次化は存在するか？

$$
\begin{tikzcd}
\text{ベクトルマトロイド } M \arrow[r] \arrow[d] & \text{符号 } C(M) \arrow[r] \arrow[d] & \text{格子 } L(C(M)) \arrow[d] \\
\exists ? \arrow[r] \arrow[d] & W_C^{(g)} \arrow[r, "(\text{高次数テータ写像})"'] \arrow[d] & \vartheta^{(g)}_{L(C(M))} \arrow[d] \\
T \arrow[r, "(\text{Greene})"'] & W_C \arrow[r, "(\text{テータ写像})"'] & \vartheta_{L(C(M))}
\end{tikzcd}
$$

(⇝ $g=1$ のとき)

注意 $T^{(g)}$ は上の図式をみたさない。

∵ $\dim \langle T^{(2)}(M(C)) \mid C$: 長さ24の Type II 符号 $\rangle$

$< \dim \langle W_C^{(2)} \mid C$: 長さ24の Type II 符号 $\rangle$

期待される系

コンウェイの問題の高次化の例の構成.

問題（コンウェイの問題の高次化）

$L_1 \not\cong L_2$ かつ $\Theta_{L_1}^{(g)} = \Theta_{L_2}^{(g)}$ をみたすものを見つけよ。

__問題__ (調和多項式 コンウェイの問題)

$k \in \mathbb{N}$, $\forall P \in \mathrm{Harm}_k(\mathbb{R}^n)$ $\left(\text{or } \forall P \in \mathrm{Harm}_{\leq k}(\mathbb{R}^n)\right)$

$L_1 \neq L_2$ かつ $\vartheta_{L_1,P} = \vartheta_{L_2,P}$ となるものを見つけよ。

$$\left(\vartheta_{L,P} = \sum_{x \in L} P(x)\, q^{(x,x)}\right)$$

__デザイン理論との関係__

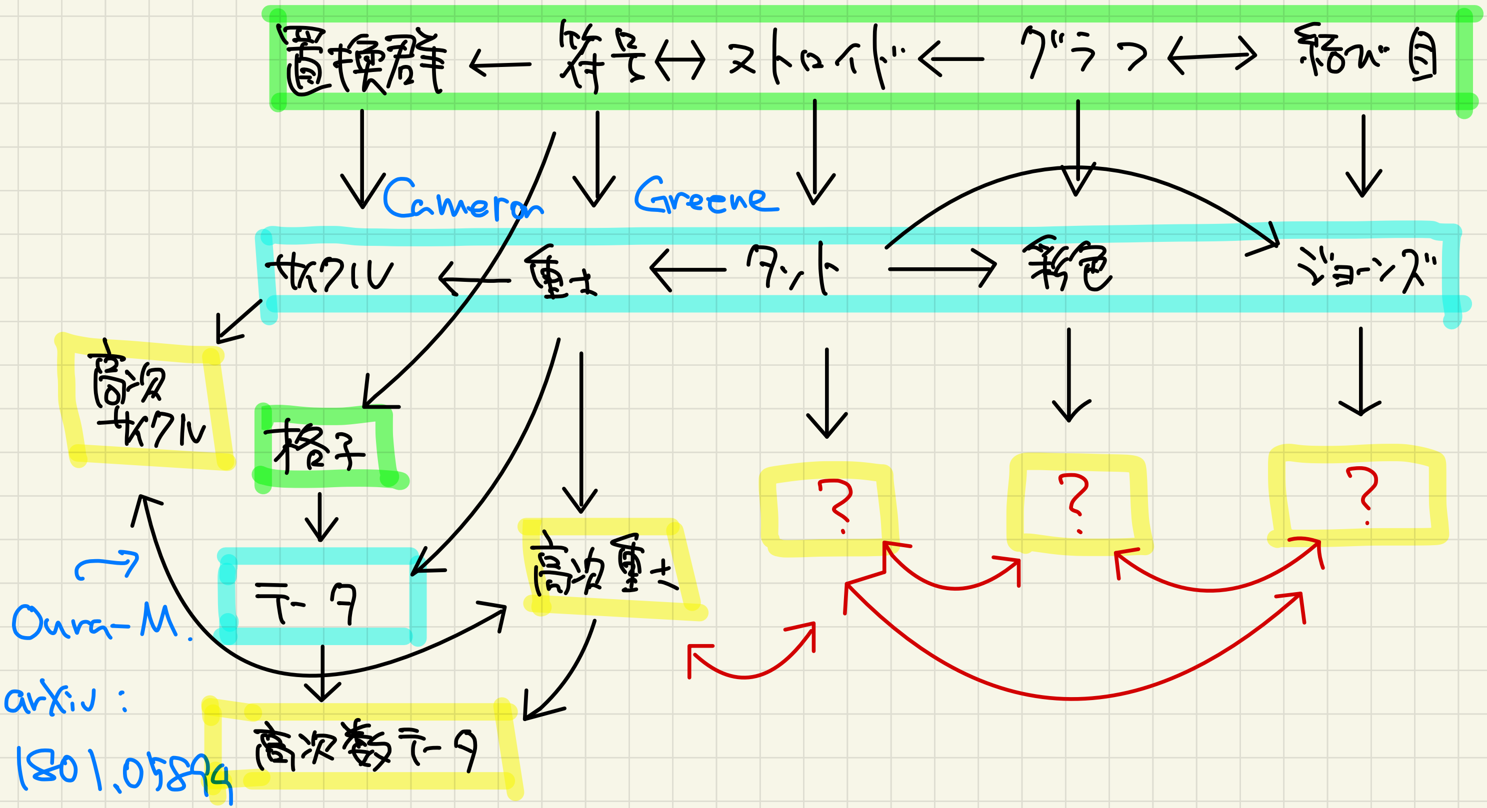
$\forall P \in \mathrm{Harm}_k(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq k \leq t)$

$\vartheta_{L,P} = 0 \iff L$ は t-均質 $(\iff \forall i,\ L_i$ は t-デザイン$)$

__予想__ L 整数格子, t-均質 $\Rightarrow t \leq 11$

__問題__ $L \subset \mathbb{R}^n$ のとき $t \leq f(n)$ となる関数 $f(n)$ を与えよ。

問題



置換群
符号
マトロイド
グラフ
結び目
Cameron
Greene
サイクル
重み
タット
彩色
ジョーンズ
高次サイクル
格子
データ
高次重み
高次数データ
?
?
?
Oura-M.
arXiv :
1801.05894