

CM体上の p 進アルティン L 関数について (落合理[大阪大学]との共同研究)

§1. アルティン L 関数

目標

CM体の p 進アルティン
 L 関数を作りたい!

§2. 総実体の場合

(Ralph GREENBERG '84, '14)

↑
既存の p 進 L 関数と
使って.

§3. CM体の場合

※最新版を閲覧する際には

リロードして下さい.

講演後の相筆修正は
緑色で書き込んで
います

§1

F : 代数体.

$$\begin{array}{ccc} & \text{Gal}(\overline{F}/F) & \\ \parallel & & \\ \rho: G_F & \longrightarrow & \text{Aut}(V_\rho) \\ & \text{SII} & \\ & \text{GL}_d(\overline{\mathbb{Q}}) & \end{array}$$

アルティン表現 (i.e., 像が有限)

$$L(s, \rho) := \prod_{p: F \text{ の有限素点}} \det \left(I - \underbrace{\text{Frob}_p}_\uparrow \big| V_\rho^{I_p} \right)^{-1} \quad \left| \begin{array}{l} \uparrow \text{ } p \text{ の幾何的} \\ \text{フロベニウス,} \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \uparrow \text{ } \\ \text{惰性的.} \end{array} \right.$$

$I = \mathbb{N}_p^{-s}$

$\mathbb{C}$ 上解析接続
→

アルティンの L 関数

命題

$$(1) \rho_i: G_F \rightarrow \text{Aut}(V_{\rho_i}). \quad i=1, 2$$

$$\Rightarrow L(s, \rho_1 \oplus \rho_2) = L(s, \rho_1) L(s, \rho_2)$$

$$(2) [\text{inductivity}]. \quad H \leq_{\text{閉}} G_F. \quad \rho_H: H \rightarrow \text{Aut}(V_{\rho_H})$$

$$\text{に對し.} \quad L(s, \text{Ind}_H^{G_F} \rho_H) = L(s, \rho_H).$$

$$\begin{aligned} \text{Ind}_H^{G_F} \rho_H &= \overline{\mathbb{Q}}[G_F] \otimes_{\mathbb{Q}[H]} V_{\rho_H} \\ &\cong \bigoplus_{\sigma \in G_F/H} \sigma V_{\rho_H}. \end{aligned} \quad \text{言等表現}$$

§ 2.

F^+ : 総実代数体.

総偶.

$$\rho: G_{F^+} \longrightarrow \text{Aut}(V_\rho). \quad \text{totally even}$$

$$\text{i.e., } F'^+ = \overline{F^+}^{\text{Ker } \rho}: \underline{\text{総実.}}$$

$$\rightsquigarrow L(1-n, \rho) \quad (\forall n \in 2\mathbb{N}) \quad \text{は代数的}$$

(SIEGEL, KLINGEN.)

$$\mathbb{C} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times \twoheadrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$$

① $L(1-n, \rho) \quad \forall n \in 2\mathbb{N} \quad \exists \quad p$ -進補間する
 p -進 L 関数を作った!!

§ 2.1 構成

ブラウアーの誘導定理

$$\rho = \sum_i a_i \operatorname{Ind}_{F_i^+}^{F^+} \chi_i \quad (a_i \in \mathbb{Z})$$

$$\chi_i : G_{F_i^+} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times \text{ 1次元指標}$$

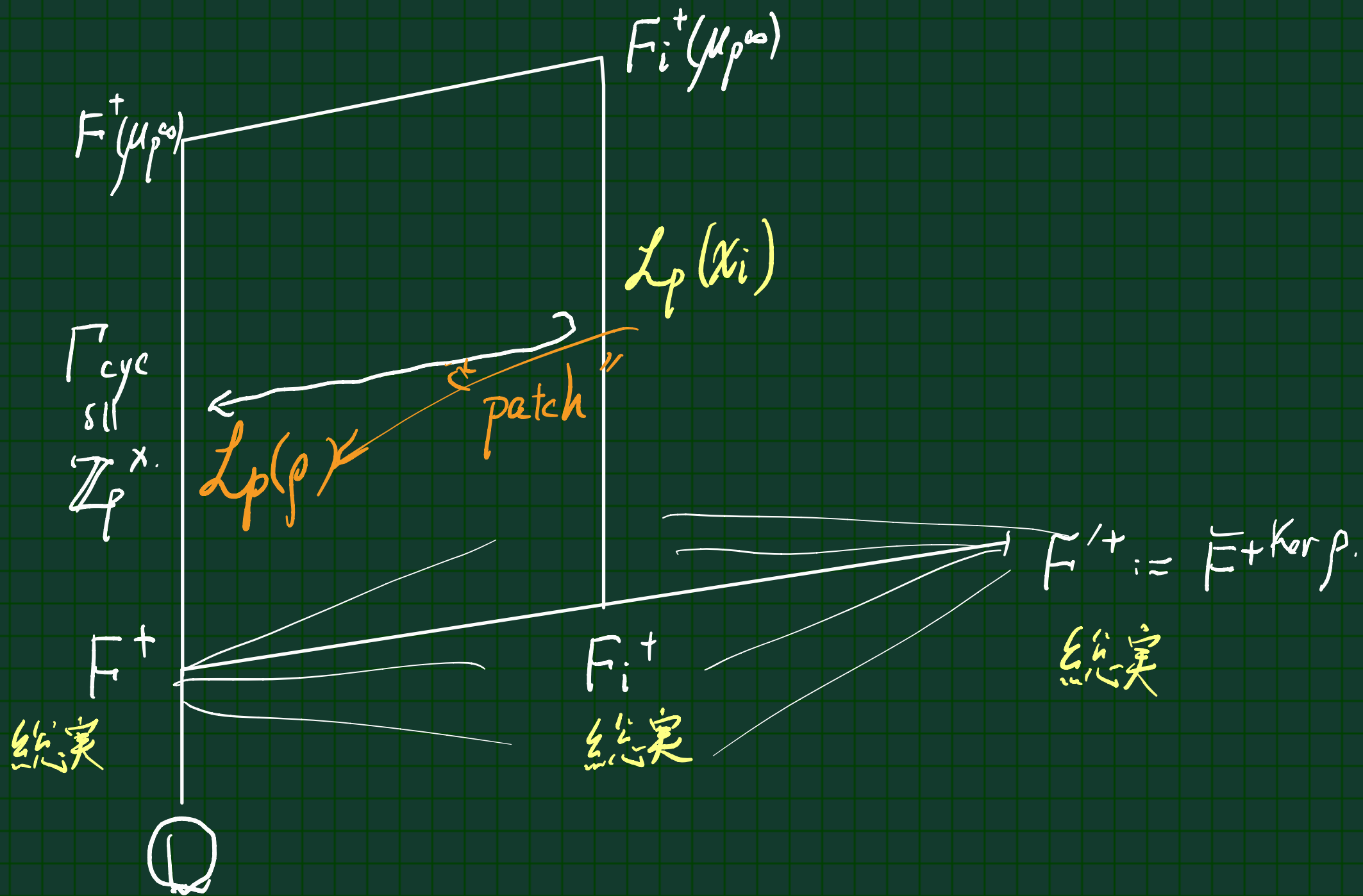
仮想表現

virtual representation

e.g.
~~i.e.~~

$$\rho = \rho_1 - \rho_2$$

$$\Leftrightarrow \rho \oplus \rho_2 \cong \rho_1$$



各 F_i^+ に対し.

定理 (Barski, Cassou-Noguès, Deligne-Ribet.)

$$\exists \mathcal{L}_p(\chi_i) \in \Lambda_i^{\text{cyc}} := \mathcal{O}[[\text{Gal}(F_i^+(\mu_{p^\infty})/F_i^+)]]$$

$\chi_i \neq 1$

s.t.,

$$\kappa_{\text{cyc}}: \text{Gal}(F^+(\mu_{p^\infty})/F^+) \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$$

随分指標

p -因子を除く.

$$\kappa_{\text{cyc}}^n(\mathcal{L}_p(\chi_i)) = L^{\text{pt}}(1-n, \chi_i) \quad \forall n \in 2\mathbb{N}$$

($\chi_i = 1$ のときは分母が $\rightarrow$).

$$\rightsquigarrow \boxed{L_p(\rho) := \prod_i L_p(\chi_i)^{a_i}} \in \underbrace{\text{Tot. Frac.}}_{\text{全分環}} \bigwedge_{F^+}^{\text{cyc.}}$$

とすると、所望の補間性質を満たす

$$\therefore) \kappa_{\text{cyc}}^n(L_p(\rho)) \stackrel{\text{定義}}{=} \prod_i \kappa_{\text{cyc}}^n(L_p(\chi_i))^{a_i}$$

$$n \in 2\mathbb{N} \quad \stackrel{\text{定理}}{=} \prod_i \underbrace{L(1-n, \chi_i)}_{\text{命題 (2)}}^{a_i}$$

$$L(1-n, \text{Ind}_{F_i^+}^{F^+} \chi_i)$$

$$\stackrel{\text{命題 (1)}}{=} L(1-n, \underbrace{\sum_i a_i \text{Ind}_{F_i^+}^{F^+} \chi_i}_{=\rho}) \quad \text{□}$$

§ 2.2 整性 integrality.

← 岩澤予想 IMC.

同分変形

$$(L_p(\chi_i)) = \text{Char}_{\Lambda_i^{\text{cyc}}} \text{Sel}(F_i, \text{Def}^{\text{cyc}}(\chi_i))$$

セル群

“解析的”

“代数的不変量”

(MAZUR-WILES, WILES)

ポントリャギン
双対.

① 特性 p である p -進 L -関数と

“同じ振る舞い” をする

命題 (1), (2)

↑ シャピロの補題 SHAPIRO'S LEMMA

$\leadsto \left(L_p(p) \right) \stackrel{\text{IMC for } p.}{=} \text{Char}_{\Lambda^{cyc}} \text{Sel}(F^+, \text{Def}^{cyc}(p))^\vee$

Diagram: $\Lambda^{cyc.}$ (with a small φ below it) is connected by an arrow to Λ^{cyc} (with φ below it). Above the second Λ^{cyc} is the text "整数" (integer) with a wavy underline.

Below the equation, there are two vertical bars:

 Left: 定義 (Definition)

 Right: 命題' (Proposition')

$\left(\prod_i L_p(\alpha_i)^{a_i} \right) \stackrel{\text{IMC (WILES} + \alpha)}{=} \prod_i \left(\text{Char}_{\Lambda_i^{cyc}} \text{Sel}(F_i^+, \text{Def}^{cyc}(\alpha_i))^\vee \right)^{a_i}$

There are two parallel diagonal lines at the bottom right of the page.

⇒ 注.

I°. $L_p(\rho) \in \Lambda^{cyc}$ を示さなうと.

補間性質から $L_p(\rho)$ を特徴づけられなう.

II°. 補間性質による特徴づけから

$L_p(\rho)$ は ρ の ブラウアー-分解 に依らなう!

III°. 系として, ρ に対する主予想も従う.

§3

F^+ : 総実

F/F^+ : 総虚 2 次拡大.

(F : CM 体)

complex multiplication
ordinary.

仮定

• F^+ の p 上の素点は F で完全分解. (通常性)

$\rightsquigarrow \exists \Sigma_F: p$ 通常 CM 型. fix.

虚素点ごとに $\mathbb{C}$ への埋め込みを
選んだもの.

• p は F^+ で絶対不分岐.

$$\rho: G_F \rightarrow \text{Aut}(V_\rho) \quad \text{ある } \rho \text{ は表現 s.t.,}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet F := F^{\text{Ker } \rho} \text{ が CM 体.} \\ \bullet \rho \text{ 上の素点で不分裂.} \end{array} \right.$$

§ 3.1 構成.

* CM 体の場合.

$$L(0, \rho \eta) \\ \cancel{L(-n, \rho)} = 0. \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\Rightarrow$ “引のち” と補間する.

$$\eta: A_F^\times / F^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times \quad (A_0)^\pm \text{ 型指標}$$

$$\eta(x_\infty) = \prod_{\sigma \in \Sigma_F} \chi_\sigma^{(w) + (r_\sigma)} \overline{\chi_\sigma}^{-r_\sigma}.$$

größencharacter
無限型
 $(w, r_\sigma) \in \mathbb{Z}$
d+1 1. 2. x-y

$$\rho = \sum_i a_i \operatorname{Ind}_{G_{F_i}}^{G_F} \chi_i$$

ブライマー-分解.

$$\sum_{i \geq 1} \chi_i : A_{F_i}^{\times} / F_i^{\times} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^{\times} \quad \tau \text{ は}$$

定理 (KATZ, Artin-Tilovine)

多変数!!

$$\exists! L_p^{\Sigma_{F_i}}(\chi_i) \in \Lambda_i^{\max} := \hat{\mathcal{O}}^{\text{ur}}[[\text{Gal}(F_i^{\max}/F_i)]] \quad \text{s.t.},$$

$$\frac{\tilde{\eta}^{\text{gal}}(L_p^{\Sigma_{F_i}}(\chi_i))}{\Omega_{\text{CM}, p, F_i}^{w_i t_i + r_i}} = W_p(\tilde{\eta}) \frac{(-1)^{w_i d_i} (2\pi)^{w_i l_i} \Gamma_{\Sigma_{F_i}}(w_i t_i + r_i)}{(\text{Im } \underline{d_i})^{r_i}} \times \frac{L_{\Sigma_{F_i, p}^c C_i}(\tilde{\eta}, 0)}{\Omega_{\text{CM}, \infty, F_i}^{w_i t_i + r_i}}$$

$\nwarrow$ $\tilde{\eta}$ の χ_i -因子を
除く.
 $\Sigma_{F_i, p}^c C_i$

$\prod_{\mathfrak{p} \in \Sigma_{F_i, p}} (1 - \tilde{\eta}(\mathfrak{p})^{-1} N \mathfrak{p}^{-1}) \times$

C_i : χ_i の prime-to- p conductor.

∴ $\tilde{\eta} : A_{F_i}^x / F_i^x \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}^x$ (A_0) 型量指標.

無限型. $w_i t_i + r_i = w_i \sum_{\sigma \in \Sigma_{F_i}} \sigma + \sum_{\sigma \in \Sigma_{F_i}} r_{i,\sigma} (\sigma - \bar{\sigma})$

重指数表記を
採用

i.e. $\tilde{\eta}((x_\sigma)) = \prod_{\sigma \in \Sigma_{F_i}} \sigma(x_\sigma)^{w_i + r_i} \bar{\sigma}(x_\sigma)^{-r_i}$.

$\tau^\circ \left(w_i \geq 1 \wedge \forall r_{i,\sigma} \geq 0 \right)$ or $\left(w_i \leq 1 \wedge \forall r_{i,\sigma} \geq 1 - w_i \right)$

Σに1-するの. (+α).

◦ $\Omega_{CM, ?, F_i}$ $? = \infty, p$: CM 周期.

◦ $\Gamma_{\Sigma_{F_i}}(w_i t_i + r_i) = \prod_{\sigma \in \Sigma_{F_i}} \Gamma(w_i + r_{\sigma, i})$.

◦ $W_p(\tilde{\eta})$: "local epsilon factor at p " $\left(\tilde{\eta}$ を分岐する $p \in \Sigma_p$ の $\tilde{\eta}$ の一般化"p-和"の積

$$\textcircled{a} \quad \underline{\delta_i} \in F_i \quad \text{s.t.}, \quad \textcircled{a} \quad \delta_i^c = -\delta_i, \quad \text{Im}(\sigma(\delta)) > 0 \quad \forall \sigma \in \Sigma_i.$$

↑
虚数乗法をもち
アベル多様体の
編極を与える。

$$\textcircled{a} \quad \langle u, v \rangle_\delta := \frac{uv^c - u^c v}{2\delta} \quad \text{カ\tilde{v}}.$$

$$\Gamma_{F_i} \wedge \frac{\Gamma_{F_i}}{\Gamma_{F_i}^+} \longrightarrow \partial_{F_i^+} \subset \quad \text{を誘導}$$

$(\Gamma_{F_i^+}\text{-module}) \uparrow p \subset \underline{C_i^c} \text{ と素}$

$$(\text{Im } \delta)^{v_i} = \prod_{\sigma \in \Sigma_{F_i}} (\text{Im } \sigma(\delta))^{r_\sigma}.$$

Γ_F は代数体 F の
整数環
↑
"fraktur r " の $\sim$ あり。

$$\langle c \rangle = \text{Gal}(F_i/F_i^+)$$

↑ 複素共役

定理 (H. - OCHIAI., now checking)

$$\exists! L_p^{\Sigma_F}(\rho) \in \Lambda^{\max} := \hat{\mathcal{O}}^{\text{ur}}[[\text{Gal}(F^{\max}/F)]] \quad \text{s.t.,}$$

$$\frac{\eta^{\text{gal}}(L_p^{\Sigma_F}(\rho))}{\left(\Omega_{\text{CM}, p, F}^{w, t, +, r}\right)^{d_p}} = \underbrace{W_p(\rho\eta)}_{\text{local } \varepsilon\text{-factor at } p} \left(\frac{(-1)^{w, d} (2\pi)^{|r|} \Gamma_{\Sigma_F}(w, t, +, r)}{(\text{Im } \underline{\delta})^{|r|}} \right)^{d_p}$$

$\prod_{\beta \in Z_p} \det(1 - (\rho\eta)(\beta) \sqrt{\beta}^{-1}) \times \frac{L^{\Sigma_{F,p}^c \cup \Sigma_{F,p}^r}(\rho\eta, 0)}{\left(\Omega_{\text{CM}, \infty, F}^{w, t, +, r}\right)^{d_p}}$

$\swarrow$ 反作用

$$d_p = \dim(\bar{V}_p)$$

⇒ 注 (技術的)

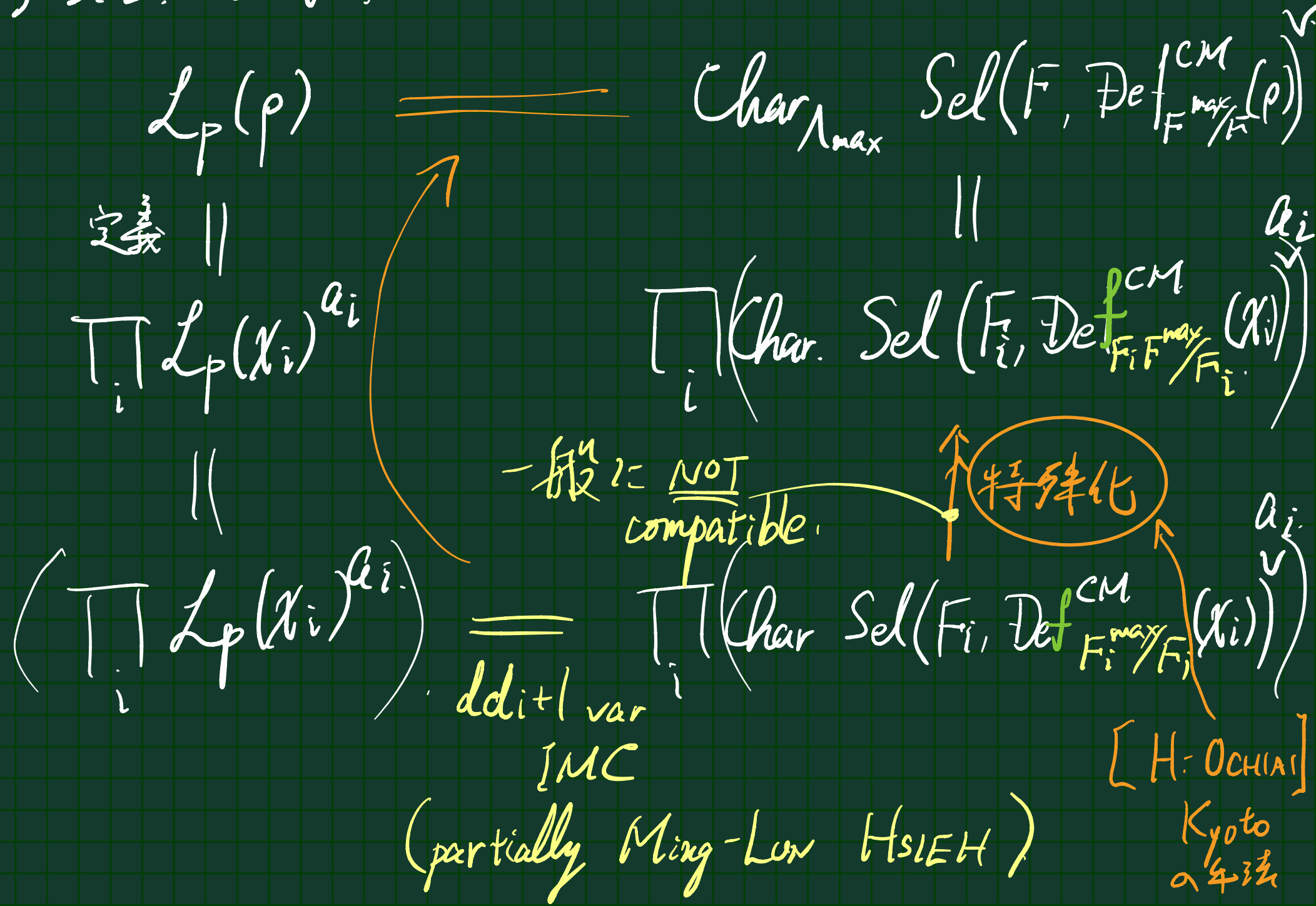
p の絶対不分支性

Ⅰ° ここでは base field での $\delta \in$
このためには polarization ideal $\mathcal{E}$
“ $p \in \mathbb{C}$ と素”ではなく“ p と素”に取る必要あり
すべての F_i に埋め込んで
→ 関数等式が 使っている

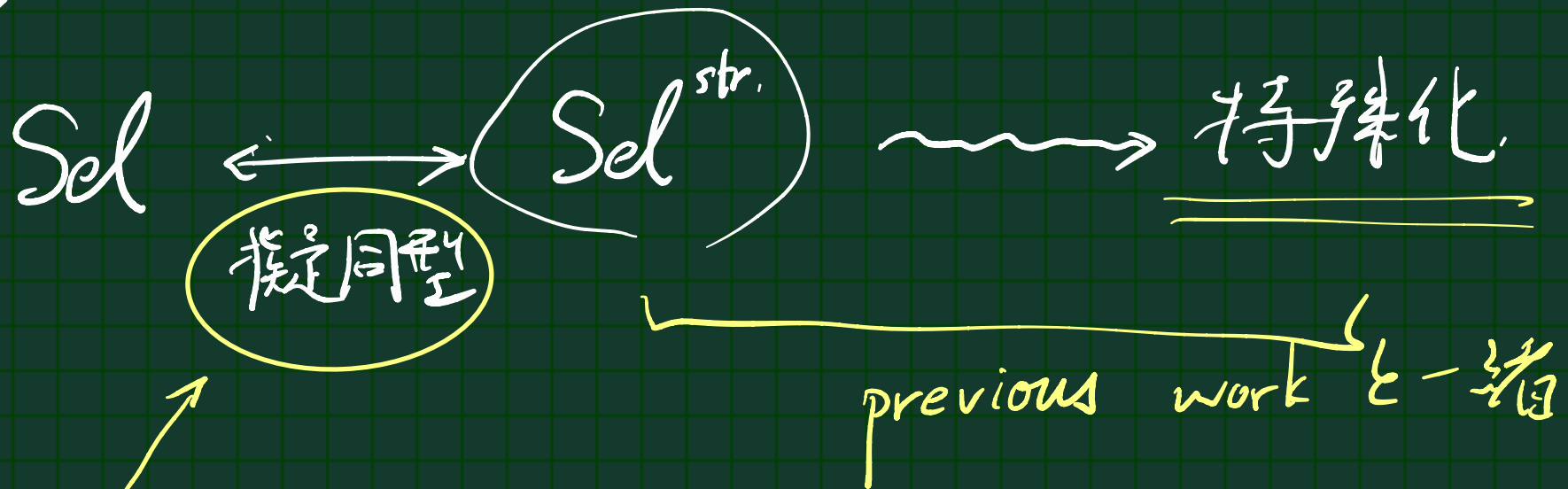
Ⅱ° $W_p(\chi_i \eta)$, $\Omega_{CM, ?, F_i}$ 崩れる可能性あり
(臨界点の“半分のみ”を補間?)
も “整合的に” する必要あり

$$\left[\begin{array}{l} \text{他のところは like 総実} \\ \dim_{\substack{\text{“} \\ d_p}} V_p = \sum_i a_i \dim \underbrace{\text{Ind}_{G_{F_i}}^{G_F} \chi_i}_{\substack{\text{“} \\ d_i}} \end{array} \right]$$

§ 3.2. 整性.



流れ



$F^{\max}/F$ に於いて, p 上の素点での分解群の 階数 ≥ 2 ならば O.K.

② p -adic SCHANUEL conjecture を仮定すれば
OK.