An example of A_2 Rogers-Ramanujan bipartition identities of level 3

(based on arXiv:2205.04811)

2022/05/20 (Fri)

早稲田大学整数論セミナー@オンライン

Shunsuke Tsuchioka（Tokyo Institute of Technology）

tshun@kurims.kyoto-u.ac.jp

Plan

(1) ロジャーズ・ラマヌジャン恒等式と主結果の紹介(30分)

(2) 表現論的背景と関連結果の紹介(30分)

(3) 主結果の証明に関するコメント(30分)

(3-1) おおまかな流れ(ここまで。残りは状況に応じて)

(3-2) 円柱分割について([T,¥S6]に簡単なレビュー)

(3-3) Sister Celineのtechniqueについて([T,¥S7.1]に簡単なレビュー)

(3-4) q差分方程式の自動導出について([T,¥S5]に簡単なレビュー)

(3-5) 表現論的解釈について

1913年，ラマヌジャンがハーディーに宛てた手紙に次の公式がある：

ロジャーズ・ラマヌジャン連分数：
$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cfrac{}{\vdots}}}} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) e^{2\pi/5}$$

ハーディー：(“The Indian Mathematician Ramanujan”, Amer.Math.Month.**44**,1937),
“They defeated me completely; I had never seen anything in the least like them before. A single look at them is enough to show that they could only be written down by a mathematician of the highest class. They must be true because, if they were not true, no one would have had the imagination to invent them.”

[拙訳]これらの公式に，完璧に打ち負かされてしまった．このようなものをいまだかつて見たことがない．ぱっと見ただけで，最高レベルの数学者によってのみ書き下されたものだと分かる．これらは真であるはずだ．何故なら人にはこのようなものを捏造するだけの想像力は備わっていないのだから．

映画だと「本物だとも想像力で書けるものか」「打ちのめされた初めて見たよ」

ロジャーズ・ラマヌジャン連分数：
$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{\vdots}}} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) e^{2\pi/5}$$

ハーディー：(“The Indian Mathematician Ramanujan”, Amer.Math.Month.**44**,1937),

“They defeated me completely; I had never seen anything in the least like them before. A single look at them is enough to show that they could only be written down by a mathematician of the highest class. They must be true because, if they were not true, no one would have had the imagination to invent them.”

[拙訳]これらの公式に，完璧に打ち負かされてしまった．このようなものをいまだかつて見たことがない．ぱっと見ただけで，最高レベルの数学者によってのみ書き下されたものだと分かる．これらは真であるはずだ．何故なら人にはこのようなものを捏造するだけの想像力は備わっていないのだから．

ロジャース・ラマヌジャン連分数は，次の印象的な公式から導出される

$$1+\sum_{n\geq 1}\frac{q^{n^2}}{(1-q)\cdots(1-q^n)}=\frac{1}{(1-q)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^9)(1-q^{11})(1-q^{14})\cdots}$$

$$1+\sum_{n\geq 1}\frac{q^{n^2+n}}{(1-q)\cdots(1-q^n)}=\frac{1}{(1-q^2)(1-q^3)(1-q^7)(1-q^8)(1-q^{12})(1-q^{13})\cdots}$$

ポッホハマー記法 $(a;q)_n := (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})$, $(a_1,\cdots,a_m;q)_n := (a_1;q)_n\cdots(a_m:q)_n$ を用いると

ロジャース・ラマヌジャン恒等式：$\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty},\quad \sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty}$

マクマホン：(“Combinatory Analysis”, Cambridge University Press,1915),
“This most remarkable theorem has been verified as far as the coefficient of x^{89} by actual expansion so that there is practically no reason to doubt its truth; but it has not yet been established”

1917年にラマヌジャンがロジャースの証明を図書館で再発見されたとされる（ハーディー, “Ramanujan”, CUP, 1940）が諸説あるようである.

（Sills,“An Invitation to the Rogers–Ramanujan Identities”, CRS Press,2018）

シューアとマクマホンは、ロジャース・ラマヌジャン恒等式が、次の初等的命題と同値であることに気づいた: 任意の自然数 n について,

① (A) を満たす n の分割は, (B) を満たす n の分割と同数存在する.

② (C) を満たす n の分割は, (D) を満たす n の分割と同数存在する.

(A): 隣り合ったパートの差は2以上 (B): 各パートは5で割ると1または4余る

(C): (A) かつパートに1を含まない (D): 各パートは5で割ると2または3余る

例: ϕ 　1　 $2 = 1+1$ 　 $3 = 2+1 = 1+1+1$

$4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$

$5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$

$6 = 5+1 = 4+2 = 4+1+1 = 3+3 = 3+2+1 = 3+1+1+1$
$= 2+2+2 = 2+2+1+1 = 2+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1+1$

$7 = 6+1 = 5+2 = 5+1+1 = 4+3 = 4+2+1 = 4+1+1+1 = 3+3+1 = 3+2+2$
$= 3+2+1+1 = 3+1+1+1+1 = 2+2+2+1 = 2+2+1+1+1 = 2+1+1+1+1+1$
$= 1+1+1+1+1+1+1$

ロジャーズ・ラマヌジャン分割定理:分割で以下の条件を考える。

(R1) 隣り合ったパートの差は2以上。

(R2) 1を含まない。

RRを(R1)を満たす分割の集合、RR'を(R1)-(R2)を満たす分割の集合とする。

$$\Rightarrow \sum_{\lambda\in RR} q^{|\lambda|} = \frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty} = \sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}, \quad \sum_{\lambda\in RR'} q^{|\lambda|} = \frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty} = \sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n}$$

Kanade-Russell予想 (2014):分割で以下の条件を考える。

(K1) 2つ隣りのパートの差は3以上。

(K2) 隣り合ったパートの差が1以下なら、和は3の倍数。

(K3) 1を含まない。

(K4) 2を含まない。

Kを (K1)-(K2) を満たす分割の集合、K'を (K1)-(K3) を満たす分割の集合、K''を (K1)-(K4) を満たす分割の集合とする。このとき …

Kanade-Russell予想 (2014): 分割で以下の条件を考える。
(K1) 2つ隣りのパートの差は3以上。
(K2) 隣り合ったパートの差が1以下なら、和は3の倍数。
(K3) 1を含まない。
(K4) 2を含まない。
Kを (K1)-(K2) を満たす分割の集合、K' を (K1)-(K3) を満たす分割の集合、K'' を (K1)-(K4) を満たす分割の集合とする。このとき …

例: ϕ　　1　　2 = 1+1　　3 = 2+1 = 1+1+1

4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1

5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1

6 = 5+1 = 4+2 = 4+1+1 = 3+3 = 3+2+1 = 3+1+1+1
= 2+2+2 = 2+2+1+1 = 2+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1+1

7 = 6+1 = 5+2 = 5+1+1 = 4+3 = 4+2+1 = 4+1+1+1 = 3+3+1 = 3+2+2
= 3+2+1+1 = 3+1+1+1+1 = 2+2+2+1 = 2+2+1+1+1 = 2+1+1+1+1+1
= 1+1+1+1+1+1+1

Kanade-Russell予想 (2014): 分割で以下の条件を考える。

(K1) 2つ隣りのパートの差は3以上。

(K2) 隣り合ったパートの差が1以下なら、和は3の倍数。

(K3) 1を含まない。

(K4) 2を含まない。

Kを (K1)-(K2) を満たす分割の集合、K' を (K1)-(K3) を満たす分割の集合、K'' を (K1)-(K4) を満たす分割の集合とする。

$$\sum_{\lambda\in K} q^{|\lambda|} = \frac{1}{(q,q^3,q^6,q^8;q^9)_\infty} = \sum_{m,n\geq 0} \frac{q^{m^2+3mn+3n^2}}{(q;q)_m(q^3;q^3)_n}$$

$$\sum_{\lambda\in K'} q^{|\lambda|} = \frac{1}{(q^2,q^3,q^6,q^7;q^9)_\infty} = \sum_{m,n\geq 0} \frac{q^{m(m+1)+3mn+3n(n+1)}}{(q;q)_m(q^3;q^3)_n}$$

$$\sum_{\lambda\in K''} q^{|\lambda|} = \frac{1}{(q^4,q^3,q^6,q^5;q^9)_\infty} = \sum_{m,n\geq 0} \frac{q^{m(m+2)+3mn+3n(n+1)}}{(q;q)_m(q^3;q^3)_n}$$

(注) これは、例えば、「nの分割でKに属するものは、nの分割で各パートがmodulo 9で1,3,6,8 なものと同数ある」といった主張と同値である。

この講演の主定理は、2色分割に関するものである。

定義: nの2色分割とは、n を、色のついた自然数と普通の自然数で書くこと。

例: 以下は、5の2色分割である。

5 = 5 = 4+1 = 4+1 = 4+1 = 4+1 = 3+2 = 3+2 = 3+2 = 3+2 = 3+1+1 = 3+1+1
= 3+1+1 = 3+1+1 = 3+1+1 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+2+1 = 2+2+1 = 2+2+1 = 2+2+1
= 2+2+1 = 2+1+1+1 = 2+1+1+1 =2+1+1+1 = 2+1+1+1 = 2+1+1+1 = 2+1+1+1
= 2+1+1+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1
= 1+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1

（注）n の2色分割は、n の bipartition と自然に同一視される。

例: 4+4+3+2+1+1+1 ←→ ((4,2,1), (4,3,1,1))

定理 [T]: 2色分割で以下の条件を考える。

(D1) (色を忘れると) 隣り合ったパートの差は2以上。ただし、和が3の倍数で色が異なる場合は例外とする。

(D2) (色を忘れると) 隣り合ったパートの差が2で、和が3の倍数でないなら、この2つのパートは、「色がついている、色がついていないの順」とならない。

(D3) (3k, 3k, 3k−2), (3k+2, 3k, 3k), (3k+2, 3k+1, 3k−1, 3k−2) を含まない。
つまり (3, 3, 1), (5, 3, 3), (5, 4, 2, 1) の"3とばし"は含まない。

(D4) パートに 1, 1, 2 を含まない。このとき …

例:

5 = 5 = 4+1 = 4+1 = 4+1 = 4+1 = 3+2 = 3+2 = 3+2 = 3+2 = 3+1+1 = 3+1+1
= 3+1+1 = 3+1+1 = 3+1+1 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+2+1 = 2+2+1 = 2+2+1 = 2+2+1
= 2+2+1 = 2+1+1+1 = 2+1+1+1 =2+1+1+1 = 2+1+1+1 = 2+1+1+1 = 2+1+1+1
= 2+1+1+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1
= 1+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1

定理 [T]: 2色分割で以下の条件を考える。

(D1) (色を忘れると)隣り合ったパートの差は2以上。ただし、和が3の倍数で色が異なる場合は例外とする。

(D2) (色を忘れると)隣り合ったパートの差が2で、和が3の倍数でないなら、この2つのパートは、「色がついている、色がついていないの順」とならない。

(D3) (3k, 3k, 3k−2), (3k+2, 3k, 3k), (3k+2, 3k+1, 3k−1, 3k−2) を含まない。
つまり (3, 3, 1), (5, 3, 3), (5, 4, 2, 1) の"3とばし"は含まない。

(D4) パートに 1, 1, 2 を含まない。

Rを(D1)−(D3)を満たす2色分割、R' を(D1)−(D4)を満たす2色分割の集合とする

⇒ $$\sum_{\lambda\in R} q^{|\lambda|} = \frac{(q^2,q^4;q^6)_\infty}{(q,q,q^3,q^3,q^5,q^5;q^6)_\infty} = \sum_{a,b,c,d\geq 0} \frac{q^{a(a+1)+b(b+2)+3c(c+1)+3d(d+1)+2ab+3ac+3ad+3bc+3bd+6cd}}{(q;q)_a(q;q)_b(q^3;q^3)_c(q^3;q^3)_d}$$

$$\sum_{\lambda\in R'} q^{|\lambda|} = \frac{1}{(q,q^2,q^2,q^3;q^6)_\infty} = \sum_{a,b,c,d\geq 0} \frac{q^{a^2+b^2+3c^2+3d^2+2ab+3ac+3ad+3bc+3bd+6cd}}{(q;q)_a(q;q)_b(q^3;q^3)_c(q^3;q^3)_d}$$

(注) R' については、「差の条件 = 合同条件」というおなじみの解釈が可能。

Plan

(1) ロジャーズ･ラマヌジャン恒等式と主結果の紹介(30分)

(2) 表現論的背景と関連結果の紹介(30分)

(3) 主結果の証明に関するコメント(30分)

(3-1) おおまかな流れ(ここまで。残りは状況に応じて)

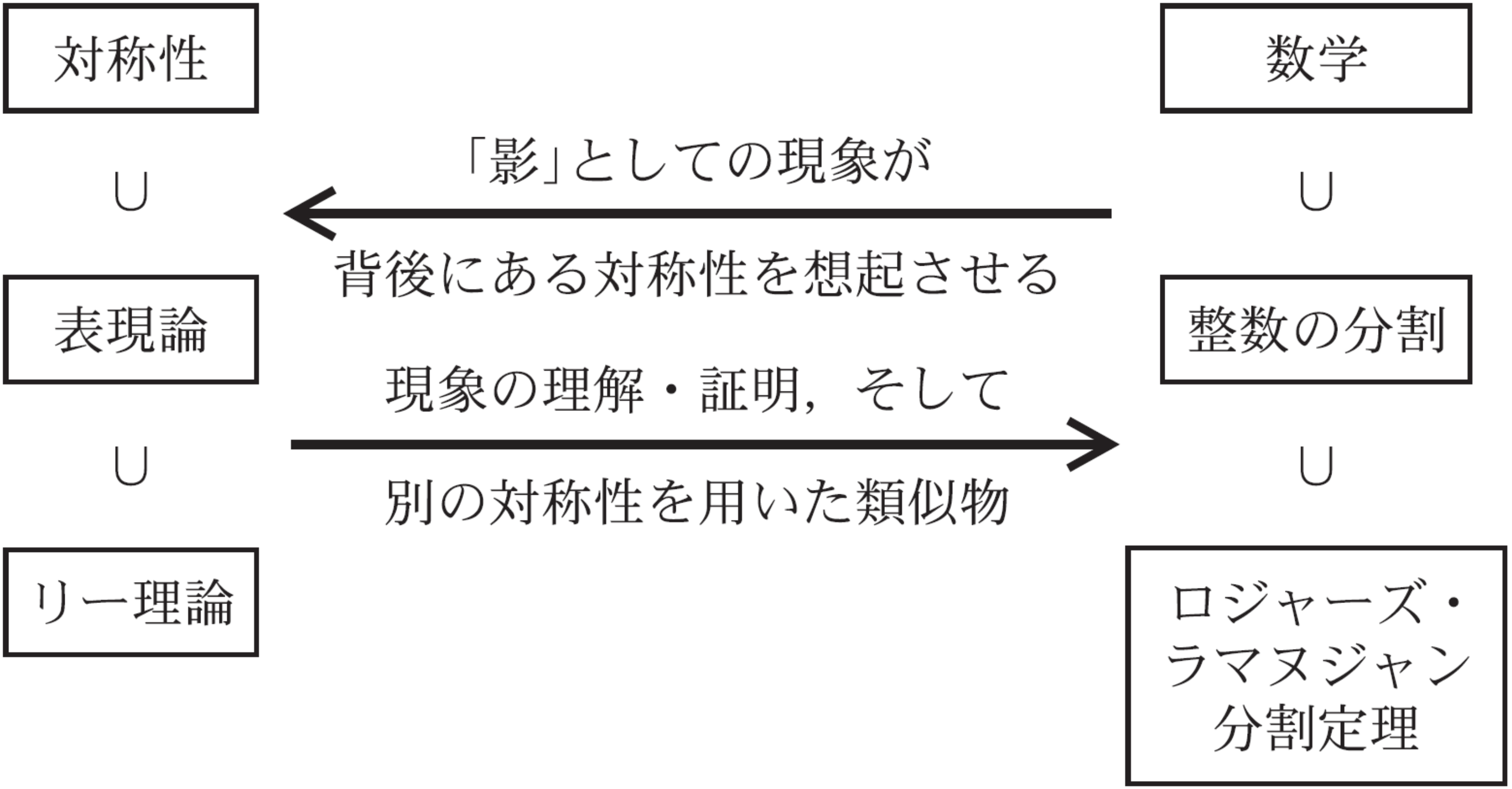
(3-2) 円柱分割について([T,¥S6]に簡単なレビュー)

(3-3) Sister Celineのtechniqueについて([T,¥S7.1]に簡単なレビュー)

(3-4) q差分方程式の自動導出について([T,¥S5]に簡単なレビュー)

(3-5) 表現論的解釈について

RR恒等式は「組合せ論」と「表現論」の相互作用と見なせる：



実際、**アフィン・リー環**の表現論で重要な**頂点作用素**の理論はRogers-Ramanujanに起源の1つをもつ
（Lepowsky-Wilson。他方はFrenkel-Kac）

Big Picture (since Lepowsky-Milne, 1970年代)

アフィン・ディンキン図形を選んで、頂点に非負整数を書くと
「Rogers-Ramanujanのような」恒等式 ⇔ 分割定理が得られる！

リー理論の重要な研究対象に，カッツ・ムーディー・リー環がある．

教科書：V.Kac, Infinite dimensional Lie Algebras, CUP, 1990

谷崎俊之，リー代数と量子群，共立出版

脇本実，無限次元リー環，岩波書店

神保道夫，量子群とヤン・バクスター方程式，シュプリンガー・フェアラーク東京

M.Kashiwara, Bases cristallines des groups quantiques, フランス数学会

ワイル・カッツ指標公式：$\mathrm{ch}\, V(\lambda) = \dfrac{\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{w(\lambda+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})^{\dim \mathfrak{g}_\alpha}}$

マクドナルド恒等式（（アフィン型で）λ=0の場合）：$\displaystyle\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{w\rho-\rho} = \prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})^{\dim \mathfrak{g}_\alpha}$

例：$A^{(1)}_1$ の場合：u=-zq, v=-z^{-1}q と特殊化したものが（講義中の）ヤコビ三重積．

$$\prod_{n\geq 1}(1-u^{n-1}v^n)(1-u^nv^{n-1})(1-u^nv^n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u^{m(m-1)/2}v^{m(m+1)/2}$$

例：$A^{(2)}_2$ の場合：適当に特殊化したものがワトソン五重積（1929年）．

$$\prod_{n\geq 1}(1-u^{4n}v^{2n-1})(1-u^{2n-1}v^n)(1-u^{2n}v^n)(1-u^{4n-4}v^{2n-1})(1-u^{2n-1}v^{n-1}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u^{m(3m+2)}v^{m(3m-1)/2} - u^{m(3m+2)}v^{(m+1)(3m+2)/2}$$

1980年年代初頭，レポウスキーとウィルソンは，$A^{(1)}_1$型加群 $V(2\Lambda_0+\Lambda_1)$, $V(3\Lambda_0)$
（レベル3標準加群）を用いた，RR恒等式の証明に成功した.

文献: J.Lepowsky-R.Wilson, The structure of standard modules, I: Universal algebras and the Rogers-Ramanujan identities, Invent.Math.,77, 199-290 (1984)他

これは「頂点作用素構成」という $A^{(1)}_1$型加群 $L(\Lambda_0)$ の実現法をさらに発展させたものである（J.Lepowsky-R.Wilson, Construction of the affine Lie algebra $A^{(1)}_1$, Comm.Math.Phys.62 (1978), 43-53).

$$\mathrm{ch}V(2\Lambda_0+\Lambda_1)=\frac{1}{(q;q^2)_\infty}\frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty}=\frac{1}{(q;q^2)_\infty}\chi(V(2\Lambda_0+\Lambda_1))$$

$$\mathrm{ch}V(3\Lambda_0)=\frac{1}{(q;q^2)_\infty}\frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty}=\frac{1}{(q;q^2)_\infty}\chi(V(3\Lambda_0))$$

1980年年代初頭，レポウスキーとウィルソンは，$A^{(1)}_1$型加群 $V(2\Lambda_0+\Lambda_1)$, $V(3\Lambda_0)$ (レベル3標準加群)を用いた，RR恒等式の証明に成功した.

文献: J.Lepowsky-R.Wilson, The structure of standard modules, I: Universal algebras and the Rogers-Ramanujan identities, Invent.Math.,77, 199-290 (1984)他

これは「頂点作用素構成」という $A^{(1)}_1$型加群 $L(\Lambda_0)$ の実現法をさらに発展させたものである(J.Lepowsky-R.Wilson, Construction of the affine Lie algebra $A^{(1)}_1$, Comm.Math.Phys.62 (1978), 43-53). 頂点作用素構成は，Frenkel-Kac や Segal によって，当時 dual resonance model と呼ばれていた弦理論の考察からもえられている. レポウスキーとウィルソンは，RR恒等式の無限積と，レベル3標準加群の指標の類似を追究する中で頂点作用素に到達し，ガーラントにその後弦理論に類似の公式が登場することを指摘されている. RR恒等式が，アフィン・リー環の表現論にインスピレーションを与えた，といってよいだろう.

定義: $\mathrm{Par} = \bigsqcup_{\ell\geq 0}\{\lambda = (\lambda_1,\cdots,\lambda_\ell)\in\mathbb{Z}^\ell \mid \lambda_1 \geq \cdots \lambda_\ell \geq 1\}$の元を(整数の)分割という.

記法: $\lambda = (\lambda_1,\cdots,\lambda_\ell)\in\mathrm{Par}$について

(1) 各 λ_i をパート, $\ell=\ell(\lambda)$を長さ, $|\lambda| := \lambda_1 + \dots + \lambda_\ell$ をサイズと呼ぶ.

(2) $j\geqq 1$について, $\lambda_i = j$ となる $1\leqq i\leqq \ell$ の個数(重複度)を $m_j(\lambda)$と書く.

例:この記法で (A) を満たす分割の集合 R , (C) を満たす分割の集合 R' は

$$R = \{\lambda\in\mathrm{Par} \mid \forall j\geq 1, m_j(\lambda)+m_{j+1}(\lambda)\leq 1\} \qquad R' = R\cap\{\lambda\in\mathrm{Par}\mid m_1(\lambda)=0\}$$
$$= \{\lambda\in\mathrm{Par}\mid 1\leq\forall i\leq \ell-1, \lambda_i-\lambda_{i+1}\geq 2\}$$

定義:2つの分割の集合 C, D ⊆ Par が分割論的に同値(C~D)とは,

任意の $n\geqq 0$ について、$|C \cap \mathrm{Par}(n)| = |D\cap\mathrm{Par}(n)|$ が成り立つこと.

ここで $\mathrm{Par}(n) := \{\lambda\in\mathrm{Par} \mid |\lambda|=n\}$ (つまり, n の分割の集合)である.

ロジャース・ラマヌジャン分割定理: $R \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(5)}_{1,4}, \quad R' \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(5)}_{2,3}$

ここで $T^{(N)}_{a,b,\cdots} := \{\lambda\in\mathrm{Par}\mid 1\leq\forall i\leq\ell(\lambda), \lambda_i\equiv a,b,\cdots \pmod N\}$

Andrews-Gordon恒等式

$A^{(1)}_1$型加群 $V((2k-i)\Lambda_0+(i-1)\Lambda_1)$ に同じ理論を適用して，以下がえられる.

定理：任意の k≧2 と 1≦i≦k について

(1) $\{\lambda \in \mathrm{Par} \mid m_1(\lambda) < i \text{ and } \forall j, \lambda_j - \lambda_{j+k-1} \geq 2\} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(2k+1)}_{\{1,\cdots,2k\}\setminus\{i,2k+1-i\}}$

(2) $\displaystyle\sum_{n_1,\cdots,n_{k-1}\geq 0} \frac{q^{N_1^2+\cdots+N_{k-1}^2+N_i+\cdots+N_{k-1}}}{(q;q)_{n_1}\cdots(q;q)_{n_{k-1}}} = \frac{(q^i,q^{2k+1-i},q^{2k+1};q^{2k+1})_\infty}{(q;q)_\infty}$ where $N_j := n_j+\cdots+n_{k-1}$

注意：k=2, i=2,1 が，RR分割定理やRR恒等式になっている. この定理自体はゴードン（1961年）やアンドリュース（1974年）が，アフィン・リー環と関係なくえていた. 頂点作用素による証明はMeurman-Primc (Adv.Math.1987)による. 偶数レベルでも，類似物がある（Andrews-Gordon-Bressoud恒等式）.

Big Picture：アフィン・ディンキン図形を選び，頂点に非負整数を書き込むごとに，”ロジャース・ラマヌジャンのような”分割定理や恒等式が存在する. 詳しくは述べないが，無限積はワイル・カッツ指標公式から計算されるものである.

$A^{(2)}{}_2$型Andrews-Gordon恒等式に向けて

S.Capparelli は，博士論文（ラトガーズ大, 1992）において $A^{(2)}{}_2$型レベル3標準加群 $V(\Lambda_0+\Lambda_1)$ と $V(3\Lambda_0)$ を頂点作用素を用いて構造解析し，以下を予想した．

定理：$C_a := R \cap \{\lambda \mid m_a(\lambda) = 0 \text{ and } \forall j, \lambda_j - \lambda_{j+1} \leq 3 \Rightarrow \lambda_j + \lambda_{j+1} \in 3\mathbb{Z}\}$（a=1,2）について

$$C_a \overset{\mathrm{PT}}{\sim} (\mathrm{Strict} \cap \{\lambda \mid \forall j, \lambda_j \not\equiv \pm a \pmod 6\})$$

注意：これは頂点作用素の考察から初めて予想された分割定理である．

アンドリュースがq級数で証明した他，CapparelliやTamba-Xieが頂点作用素で証明している．無限和もいくつか形が知られている（以下はTakigiku-Tによる）．

例：$$f_{C_a}(q) = \sum_{i,j,k\geq 0} \frac{q^{5i(i-1)/2+5j(j-1)/2+6k(k-1)+3ij+6ik+6jk+(3-a)i+(2+a)j+6k}}{(q^2;q^2)_i(q^2;q^2)_j(q^3;q^3)_k} = (-q^3,-q^6,-q^{3-a},-q^{3+a};q^6)_\infty$$

Big Picture：アフィン・ディンキン図形を選び，頂点に非負整数を書き込むごとに，”ロジャース・ラマヌジャンのような”分割定理や恒等式が存在する．詳しくは述べないが，無限積はワイル・カッツ指標公式から計算されるものである．

$A^{(2)}_2$型Andrews-Gordon恒等式に向けて

D.Nandi は，博士論文（ラトガーズ大, 2014）において $A^{(2)}_2$型レベル4標準加群 $V(2\Lambda_1)$, $V(2\Lambda_0+\Lambda_1)$, $V(4\Lambda_0)$ を頂点作用素で構造解析し，分割定理を予想した.

$$\mathcal{N}_1 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(14)}_{2,3,4,10,11,12}, \quad \mathcal{N}_2 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(14)}_{1,4,6,8,10,13}, \quad \mathcal{N}_3 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(14)}_{2,5,6,8,9,12}$$

これは[Takigiku-T, arXiv:1910.12461]で証明された.

無限和表示もえられている.

例：

$$f_{\mathcal{N}_1}(q) = \sum_{i,j\geq 0} (-1)^j \frac{q^{i(i+1)/2+j^2+2ij}}{(q;q)_i(q^2;q^2)_j} = \frac{1}{(q^2,q^3,q^4,q^{10},q^{11},q^{12};q^{14})_\infty}$$

$A^{(2)}_2$ でレベル5以上で知られていることはあまりない. M.Hirschhorn（1979年）

$$\{\lambda = (a_1 \leq a_2 \leq \cdots) \mid a_1 \geq 2, a_2 \geq a_1, a_3 - a_2 \geq 2, a_4 \geq a_3\} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(16)}_{2,3,4,5,11,12,13,14}$$

のは無限積がリー理論から予言されるものだが（レベル5の1つ），差条件が場所に依存するため，Big Pictureが予言する“RRのような分割”ではないと思われる. レベル5,7に無限積が一致するこの種の分割定理が知られている.

定理[Takigiku-T, arXiv:1910.12461]

Let $\mathcal{N}$ *denote the set of partitions* λ *satisfying the conditions* (N1)-(N6):

(N1) *For all* $1 \leq i \leq \ell(\lambda) - 1$, $\lambda_i - \lambda_{i+1} \neq 1$,
(N2) *For all* $1 \leq i \leq \ell(\lambda) - 2$, $\lambda_i - \lambda_{i+2} \geq 3$,
(N3) *For all* $1 \leq i \leq \ell(\lambda) - 2$, $\lambda_i - \lambda_{i+2} = 3 \implies \lambda_i \neq \lambda_{i+1}$,
(N4) *For all* $1 \leq i \leq \ell(\lambda) - 2$, $\lambda_i - \lambda_{i+2} = 3$ *and* $2 \nmid \lambda_i \implies \lambda_{i+1} \neq \lambda_{i+2}$,
(N5) *For all* $1 \leq i \leq \ell(\lambda) - 2$,
$\lambda_i - \lambda_{i+2} = 4$ *and* $2 \nmid \lambda_i \implies \lambda_i \neq \lambda_{i+1}$ *and* $\lambda_{i+1} \neq \lambda_{i+2}$,
(N6) $(\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \cdots, \lambda_{\ell(\lambda)-1} - \lambda_{\ell(\lambda)})$ *does not match* $(3, 2^*, 3, 0)$. *Here* 2^* *denotes any number (possibly zero) of repetitions of* 2.

Define $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3 \subseteq \mathcal{N}$ *by*

$$\mathcal{N}_1 = \{\lambda \in \mathcal{N} \mid m_1(\lambda) = 0\},$$
$$\mathcal{N}_2 = \{\lambda \in \mathcal{N} \mid m_i(\lambda) \leq 1 \text{ for } i = 1, 2, 3\},$$
$$\mathcal{N}_3 = \left\{\lambda \in \mathcal{N} \;\middle|\; \begin{array}{c} m_1(\lambda) = m_3(\lambda) = 0,\ m_2(\lambda) \leq 1, \\ \forall k \geq 1,\ \lambda \text{ does not match } (2k+3, 2k, 2k-2, \cdots, 4, 2) \end{array}\right\}.$$

Then

$$\mathcal{N}_1 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(14)}_{2,3,4,10,11,12}, \quad \mathcal{N}_2 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(14)}_{1,4,6,8,10,13}, \quad \mathcal{N}_3 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(14)}_{2,5,6,8,9,12}.$$

$A^{(2)}_2$型Andrews-Gordon恒等式に向けて

D.Nandi は，博士論文（ラトガーズ大, 2014）において $A^{(2)}_2$型レベル4標準加群 $V(2\Lambda_1)$, $V(2\Lambda_0+\Lambda_1)$, $V(4\Lambda_0)$ を頂点作用素で構造解析し，分割定理を予想した.

$$\mathcal{N}_1 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(14)}_{2,3,4,10,11,12}, \quad \mathcal{N}_2 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(14)}_{1,4,6,8,10,13}, \quad \mathcal{N}_3 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(14)}_{2,5,6,8,9,12}$$

これは[Takigiku-T, arXiv:1910.12461]で証明された.

無限和表示もえられている.

例：
$$f_{\mathcal{N}_1}(q) = \sum_{i,j\geq 0} (-1)^j \frac{q^{i(i+1)/2+j^2+2ij}}{(q;q)_i (q^2;q^2)_j} = \frac{1}{(q^2,q^3,q^4,q^{10},q^{11},q^{12};q^{14})_\infty}$$

$A^{(2)}_2$ でレベル5以上で知られていることはあまりない．M.Hirschhorn（1979年）

$$\{\lambda = (a_1 \leq a_2 \leq \cdots) \mid a_1 \geq 2, a_2 \geq a_1, a_3 - a_2 \geq 2, a_4 \geq a_3\} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(16)}_{2,3,4,5,11,12,13,14}$$

のは無限積がリー理論から予言されるものだが（レベル5の1つ），差条件が場所に依存するため，Big Pictureが予言する“RRのような分割”ではないと思われる. レベル5,7に無限積が一致するこの種の分割定理が知られている.

$A^{(2)}_2$型Andrews-Gordon恒等式に向けて

[Takigiku-T, Proc.AMS 2021年]で，レベル5,7に無限積が一致する”RRのような”恒等式を証明している.

例：
$$\sum_{i,j,k\geq 0}(-1)^k\frac{q^{i(i+1)/2+j^2+k^2+2ij+2ik+4jk+j}}{(q;q)_i(q^2;q^2)_j(q^2;q^2)_k}=\frac{1}{(q^2,q^3,q^4,q^5,q^{11},q^{12},q^{13},q^{14};q^{16})_\infty}$$

レベル6に無限積が一致する恒等式には，McLaughlin-Sills（2008年）による
$$\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2+n}(-1;q^3)_n}{(-1;q)_n(q;q)_{2n}}=\frac{1}{(q^2,q^3,q^4,q^5,q^6,q^{12},q^{13},q^{14},q^{15},q^{16};q^{18})_\infty}$$
などがある（レベルℓ標準加群は1+[ℓ/2]個存在する）. 最近，カナデ･ラッセル（Adv.Math.2022年）は，これらを含むような，任意のレベルで無限積が一致するような恒等式をえている. ただし，これらが“RRのような”恒等式かは議論の余地がある. また“RRのような”分割の条件や頂点作用素との関係も分かっていない. $A^{(2)}_2$型の“Andrews-Gordon恒等式”はワトソン5重積に関係しレベルmod 6で形が違うと想像される（6 = twistedコクセター数）.

$A^{(2)}_{奇数}$型でレベル2の場合

$A^{(2)}_5$型でレベル2の場合，Big Pictureの予言は，Göllnitz-Gordon分割定理として知られているもの（1960年代）と考えられる．1つ書くと

RR型分割定理：$\{\lambda \in \mathrm{Par} \mid \forall i, \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2 \ \ (\geq \text{ is } > \text{ if } \lambda_i \in 2\mathbb{Z})\} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(8)}_{1,4,7}$

RR型恒等式：$\displaystyle\sum_{i,j\geq 0} \frac{q^{i(3i-1)/2+4j^2+4ij}}{(q;q)_i(q^4;q^4)_j} = \frac{1}{(q,q^4,q^7;q^8)_\infty}$ （Kurşungöz, JCTA, 2019年）

頂点作用素との関係は，カナデ（Ramanujan J. 2018年）による．

$A^{(2)}_7$型でレベル2の場合，Big Pictureの予言はRR分割定理と考えられ，頂点作用素との関係は，Misra-Bos（Commun.Alg. 1994年）による．

$A^{(2)}_9$型でレベル2の場合，カナデ・ラッセル（Electron. J. Combin. 2019年）は，分割定理と恒等式を予想し，Bringmann et.al.（Crelle, 2020年）やRosengren（Ramanujan J.2021年）で証明された．頂点作用素との関係は不明．1つ書くと

$A^{(2)}_{奇数}$型でレベル2の場合

RR型分割定理: $\left\{\lambda \in \mathrm{Par} \,\middle|\, \begin{smallmatrix} m_1(\lambda)=0 \text{ and } \forall j\geq 0, m_{2j+1}(\lambda)\leq 1 \text{ and } \forall i, \lambda_i-\lambda_{i+1}\neq 1 \\ \forall i, \lambda_i-\lambda_{i+2}\geq 4 \text{ if } \lambda_{i+1}\in 2\mathbb{Z} \text{ and } (\lambda_{i+1}=\lambda_{i+2} \text{ or } \lambda_i=\lambda_{i+1}) \end{smallmatrix}\right\} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(12)}_{1,4,6,8,11}$

RR型恒等式: $$\sum_{i,j,k,\geq 0} (-1)^k \frac{q^{(i+2j+3k)(i+2j+3k-1)/2+3k^2+i+6j+6k}}{(q;q)_i(q^4;q^4)_j(q^6;q^6)_k} = \frac{1}{(q,q^4,q^6,q^8,q^{11};q^{12})_\infty}$$

$A^{(2)}_{11}$型でレベル2の場合，無限積は$A^{(2)}_{2}$型レベル4になっている．しかし，Nandi の分割と，$A^{(2)}_{11}$加群の頂点作用素を通じた関係は不明である．

$A^{(2)}_{13}$型でレベル2の場合，[Takigiku-T, Proc.AMS 2021年]で無限積が一致する“RRのような”恒等式を予想している．1つ書くと

予想: $$\sum_{i,j,k,\geq 0} (-1)^j \frac{q^{i(i+1)/2+j(j+2)+4k(2k+1)+2ij+4ik+4jk}}{(q;q)_i(q^2;q^2)_j(q^4;q^4)_k} = \frac{1}{(q,q^4,q^6,q^8,q^{10},q^{12},q^{15};q^{16})_\infty}$$

$A^{(2)}_{9}$型でレベル2の場合，カナデ･ラッセル（Electron. J. Combin. 2019年）は，分割定理と恒等式を予想し，Bringmann et.al.（Crelle, 2020年）やRosengren（Ramanujan J.2021年）で証明された．頂点作用素との関係は不明．1つ書くと

カナデ・ラッセル予想

$D^{(3)}_4$型レベル3のBig Pictureの予言と考えられるが，頂点作用素との関係は不明である．証明には$D^{(3)}_4$型マクドナルド恒等式が用いられると想像される．

$$\Leftrightarrow \sum_{m,n\geq 0} \frac{q^{m^2+3mn+3n^2}}{(q;q)_m (q^3;q^3)_n} = \frac{1}{(q,q^3,q^6,q^8;q^9)_\infty}, \cdots$$

カナデ・ラッセル予想: $K \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(9)}_{1,3,6,8}, \quad K' \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(9)}_{2,3,6,7}, \quad K'' \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(9)}_{4,3,6,5}$

$$K := \{\lambda \mid {}^{\lambda_i - \lambda_{i+2} \geq 3}_{\lambda_i - \lambda_{i+1} \leq 1 \Rightarrow \lambda_i + \lambda_{i+1} \in 3\mathbb{Z}}\}, K' := K \cap \{\lambda \mid m_1 = 0\}, K'' := K' \cap \{\lambda \mid m_2 = 0\}$$

オイラー恒等式: $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n} = (-q;q)_\infty = \frac{1}{(q;q^2)_\infty}$

$\Updownarrow$

オイラー分割定理: $(\{\lambda \mid \lambda_i > \lambda_{i+1}\} =:)\mathrm{Strict} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} \mathrm{Odd}(:= T^{(2)}_1)$

ロジャース・ラマヌジャン恒等式: $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} = \frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n} = \frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty}$

$\Updownarrow$

ロジャース・ラマヌジャン分割定理: $R \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(5)}_{1,4}, \quad R' \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T^{(5)}_{2,3}$

$$R := \{\lambda \mid \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2\}, R' := R \cap \{\lambda \mid m_1 = 0\}, T^{(N)}_{a,b,\cdots} := \{\lambda \mid \lambda_i \equiv a, b, \cdots \pmod N\}$$

Plan

(1) ロジャーズ･ラマヌジャン恒等式と主結果の紹介(30分)

(2) 表現論的背景と関連結果の紹介(30分)

(3) 主結果の証明に関するコメント(30分)

(3-1) おおまかな流れ(ここまで。残りは状況に応じて)

(3-2) 円柱分割について([T,¥S6]に簡単なレビュー)

(3-3) Sister Celineのtechniqueについて([T,¥S7.1]に簡単なレビュー)

(3-4) q差分方程式の自動導出について([T,¥S5]に簡単なレビュー)

(3-5) 表現論的解釈について

Andrews−Gordon恒等式(k=2, i=2,1がロジャーズ・ラマヌジャン恒等式)

$$\sum_{n_1,\cdots,n_{k-1}\geq 0} \frac{q^{N_1^2+\cdots+N_{k-1}^2+N_i+\cdots+N_{k-1}}}{(q;q)_{n_1}\cdots(q;q)_{n_{k-1}}} = \frac{(q^i,q^{2k+1-i},q^{2k+1};q^{2k+1})_\infty}{(q;q)_\infty} \text{ where } N_j := n_j+\cdots+n_{k-1}$$

を証明する、q級数の技法にBailey補題がある。

Bailey補題(簡易版):$\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0}, \beta = (\beta_n)_{n\geq 0}$ がBailey対ならば、つまり

$$\forall n \geq 0, \beta_n = \sum_{r=0}^{n} \frac{\alpha_r}{(q;q)_{n-r}(aq;q)_{n+r}}$$

ならば、$\alpha' = (\alpha'_n := a^n q^{n^2} \alpha_n)_{n\geq 0}, \beta' = (\beta'_n := \sum_{j=0}^{n} \frac{a^j q^{j^2}}{(q;q)_{n-j}} \beta_j)_{n\geq 0}$ もそうである。

『魅惑のロジャーズ−ラマヌジャン恒等式(A.シルズ著、高瀬幸一訳)』の3.1節は、よい解説である。Andrews-Schilling-Warnaar, An A_2 Bailey lemma and Rogers-Ramanujan-type identities, J.Amer.Math.Soc.(1999) では, $A^{(1)}_2$型でBig Pictureが予言するRR型恒等式のための “Bailey補題” を示している。

Andrews-Schilling-Warnaar(レベル3の場合):

$$\sum_{s,t\geq 0}\frac{q^{s^2-st+t^2}(q^3;q^3)_{s+t}}{(q;q)_{s+t}^2(q^3;q^3)_s(q^3;q^3)_t}=\frac{1}{(q;q)_\infty}\frac{(q^2,q^4;q^6)_\infty}{(q,q,q^3,q^3,q^5,q^5;q^6)_\infty}=\frac{1}{(q;q)_\infty}\chi(V(\Lambda_0+\Lambda_1+\Lambda_2))$$

$$\sum_{s,t\geq 0}\frac{q^{s^2-st+t^2+s+t}(q^3;q^3)_{s+t}}{(q;q)_{s+t+1}(q;q)_{s+t}(q^3;q^3)_s(q^3;q^3)_t}=\frac{1}{(q;q)_\infty}\frac{1}{(q^2,q^3,q^3,q^4;q^6)_\infty}=\frac{1}{(q;q)_\infty}\chi(V(2\Lambda_0+\Lambda_1))$$

Big Pictureが予言するRR型恒等式と考えることができるが、因子 $(q;q)_\infty$ のため、manifestly positiveな無限和にはなっていない。特に、無限和の表現論的解釈は難しいと思われる。

定理 [T]: $\displaystyle\sum_{\lambda\in R}q^{|\lambda|}=\frac{(q^2,q^4;q^6)_\infty}{(q,q,q^3,q^3,q^5,q^5;q^6)_\infty}=\sum_{a,b,c,d\geq 0}\frac{q^{a(a+1)+b(b+2)+3c(c+1)+3d(d+1)+2ab+3ac+3ad+3bc+3bd+6cd}}{(q;q)_a(q;q)_b(q^3;q^3)_c(q^3;q^3)_d}$

$$\sum_{\lambda\in R'}q^{|\lambda|}=\frac{1}{(q,q^2,q^2,q^3;q^6)_\infty}=\sum_{a,b,c,d\geq 0}\frac{q^{a^2+b^2+3c^2+3d^2+2ab+3ac+3ad+3bc+3bd+6cd}}{(q;q)_a(q;q)_b(q^3;q^3)_c(q^3;q^3)_d}$$

元々Andrews–Schilling–Warnaarは、レベル4のときに彼らのRR型恒等式をmanifestly positiveな形にした。それ以降、このタイプの恒等式(で無限積が$A^{(1)}_2$型標準加群の主指標のもの)を、A2RR恒等式と呼ぶようである。

A2RR恒等式(1999年, Andrews-Schilling-Warnaar, レベル4の一例)：

$$\sum_{r,s\geq 0}\frac{q^{r^2-rs+s^2}(q;q)_{2r}}{(q;q)_r(q;q)_{2r-s}(q;q)_s}=\frac{1}{(q,q,q^3,q^4,q^6,q^6;q^7)_\infty}=\chi(2\Lambda_0+\Lambda_1+\Lambda_2)$$

A2RR恒等式は、他にもCorteel–Welsh（Ann.Comb.2019年）でレベル4の場合Corteel–Dousse–Uncu（Proc.Amer.Math.Soc.2022年）でレベル5の場合が得られている。最近のプレプリント Kanade–Russell（arXiv:2203.05690）やWarnaar（arXiv:2111.07550）では一般的な構造を論じる試みがなされている。レベルが3の倍数のときはあまり分かっておらず、↓は初めての例である。

定理 [T]: $$\sum_{\lambda\in R}q^{|\lambda|}=\frac{(q^2,q^4;q^6)_\infty}{(q,q,q^3,q^3,q^5,q^5;q^6)_\infty}=\sum_{a,b,c,d\geq 0}\frac{q^{a(a+1)+b(b+2)+3c(c+1)+3d(d+1)+2ab+3ac+3ad+3bc+3bd+6cd}}{(q;q)_a(q;q)_b(q^3;q^3)_c(q^3;q^3)_d}$$

$$\sum_{\lambda\in R'}q^{|\lambda|}=\frac{1}{(q,q^2,q^2,q^3;q^6)_\infty}=\sum_{a,b,c,d\geq 0}\frac{q^{a^2+b^2+3c^2+3d^2+2ab+3ac+3ad+3bc+3bd+6cd}}{(q;q)_a(q;q)_b(q^3;q^3)_c(q^3;q^3)_d}$$

元々Andrews–Schilling–Warnaarは、レベル4のときに彼らのRR型恒等式をmanifestly positiveな形にした。それ以降、このタイプの恒等式（で無限積が$A^{(1)}_2$型標準加群の主指標のもの）を、A2RR恒等式と呼ぶようである。

[T, arXiv:2205.04811]の簡単な流れ

(1) アフィン・ディンキン図形 $X^{(r)}_N$ と支配的整ウェイトについて、頂点作用素を計算することで、標準加群の spanning vectors を求める。これは

$$m = (X_N\text{型ルートの個数})/(r\text{–捻れコクセター数})$$

について、適当な制限で定義される m色分割 でパラメトライズされる。

計算は原理上いつでもできそうに思われるが、実際には、$A^{(1)}_1$の任意レベル $A^{(2)}_2$のレベル2,3,4と、今回の場合($A^{(1)}_2$のレベル3)でしか実行されていないようである。$A^{(1)}_r$型では m = r なので、2色分割の条件 R と R' が得られる。

---

(2) R と R' の enhanceされた母関数のq差分方程式を求める。

例： $f_R(x,q) = \sum_{\lambda\in R} x^{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|}$

$$\begin{aligned}
&(2+3xq^4+xq^6)f_{\mathsf{R}}(x,q)\\
&= (2+4xq+4xq^2+4xq^3+3xq^4+xq^6+4x^2q^3+6x^2q^4+6x^2q^5+8x^2q^6+2x^2q^7+2x^2q^8+2x^2q^9+6x^3q^7+2x^3q^9+3x^3q^{10}+x^3q^{12})f_{\mathsf{R}}(xq^3,q)\\
&- x^2q^7(2+2q+3xq+4xq^2+xq^3+4xq^4-xq^5+4xq^6+xq^7+2x^2q^5+6x^2q^7+6x^2q^8+2x^2q^9+2x^2q^{10}+4x^2q^{11}+3x^3q^9+x^3q^{11}\\
&+6x^3q^{12}+2x^3q^{14})f_{\mathsf{R}}(xq^6,q)+x^4q^{21}(1-xq^6)^2(2+3xq+xq^3)f_{\mathsf{R}}(xq^9,q),
\end{aligned}$$

これは、Andrewsのリンク分割イデアルの理論の有限オートマトンを用いた一般化（Takigiku–Tによる。arXiv:1910.12461）で、かなり広いクラスの分割（や多色分割）について、自動的に行うことができる。

(2) R と R’ の enhanceされた母関数のq差分方程式を求める。

例： $f_R(x,q)=\sum_{\lambda\in R} x^{\ell(\lambda)}q^{|\lambda|}$

$$
\begin{aligned}
&(2+3xq^4+xq^6)f_{\mathsf{R}}(x,q)\\
&=(2+4xq+4xq^2+4xq^3+3xq^4+xq^6+4x^2q^3+6x^2q^4+6x^2q^5+8x^2q^6+2x^2q^7+2x^2q^8+2x^2q^9+6x^3q^7+2x^3q^9+3x^3q^{10}+x^3q^{12})f_{\mathsf{R}}(xq^3,q)\\
&-x^2q^7(2+2q+3xq+4xq^2+xq^3+4xq^4-xq^5+4xq^6+xq^7+2x^2q^5+6x^2q^7+6x^2q^8+2x^2q^9+2x^2q^{10}+4x^2q^{11}+3x^3q^9+x^3q^{11}\\
&+6x^3q^{12}+2x^3q^{14})f_{\mathsf{R}}(xq^6,q)+x^4q^{21}(1-xq^6)^2(2+3xq+xq^3)f_{\mathsf{R}}(xq^9,q),
\end{aligned}
$$

これは、Andrewsのリンク分割イデアルの理論の有限オートマトンを用いた一般化（Takigiku–Tによる。arXiv:1910.12461）で、かなり広いクラスの分割（や多色分割）について、自動的に行うことができる。

(3) 証明したい級数をenhanceした

$$\sum_{a,b,c,d\geq 0}\frac{q^{a^2+b^2+3c^2+3d^2+2ab+3ac+3ad+3bc+3bd+6cd}x^{a+b+2c+2d}}{(q;q)_a(q;q)_b(q^3;q^3)_c(q^3;q^3)_d}$$

$$\sum_{a,b,c,d\geq 0}\frac{q^{a(a+1)+b(b+2)+3c(c+1)+3d(d+1)+2ab+3ac+3ad+3bc+3bd+6cd}x^{a+b+2c+2d}}{(q;q)_a(q;q)_b(q^3;q^3)_c(q^3;q^3)_d}$$

のq差分方程式を求め、$f_R(x,q)$, $f_{R'}(x,q)$と同じであることを確認する。これは

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ といった、超幾何和の閉形式（または漸化式）を自動で求める

Sister Celine's techniqueのq版を実行することで、自動的に行うことができる

(4) xの肩の a+b+2c+2d を a+b+c+2d に変えた級数は、それぞれプロファイル(1,1,1)と(3,0,0)の円柱分割(cylindric partitions)のenhanceされた母関数に $(xq;q)_\infty$ をかけたものと、同じq差分方程式を満たすことが確認できる。

(3) 証明したい級数をenhanceした

$$\sum_{a,b,c,d\geq 0} \frac{q^{a^2+b^2+3c^2+3d^2+2ab+3ac+3ad+3bc+3bd+6cd} x^{a+b+2c+2d}}{(q;q)_a(q;q)_b(q^3;q^3)_c(q^3;q^3)_d}$$

$$\sum_{a,b,c,d\geq 0} \frac{q^{a(a+1)+b(b+2)+3c(c+1)+3d(d+1)+2ab+3ac+3ad+3bc+3bd+6cd} x^{a+b+2c+2d}}{(q;q)_a(q;q)_b(q^3;q^3)_c(q^3;q^3)_d}$$

のq差分方程式を求め、$f_R(x,q)$, $f_{R'}(x,q)$と同じであることを確認する。これは

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ といった、超幾何和の閉形式(または漸化式)を自動で求める

Sister Celine's techniqueのq版を実行することで、自動的に行うことができる

(4) xの肩の a+b+2c+2d を a+b+c+2d に変えた級数は、それぞれプロファイル(1,1,1)と(3,0,0)の円柱分割（cylindric partitions)のenhanceされた母関数に$(xq;q)_\infty$ をかけたものと、同じq差分方程式を満たすことが確認できる

(5) 円柱分割の（通常の）母関数については、[Bordin, Duke.Math.2007年]で無限積表示が知られているので、$f_R(1,q)$や$f_{R'}(1,q)$の無限積表示が得られる。

（まとめ）　頂点作用素（表現論）の計算　　（注：赤色は自動的）

→　2色分割の条件 R と R'

→　enhanceされた母関数 $f_R(x,q)$ と $f_{R'}(x,q)$ のq差分方程式

＝　4重の和をenhanceしてq差分方程式を導出

→　enhanceの仕方を変えてq差分方程式導出

＝　適当なプロファイルの円柱分割のenhanceされた母関数のq差分方程式

→　enhanceを忘れると(x=1にすると)無限積表示（Bordin積公式）

今後の展望：$A^{(1)}_2$型の任意レベルで、ロジャーズ・ラマヌジャンのような無限和＝無限積（ただし右辺は、標準加群の主指標）が得られるとうれしい。その際には、分割ではなく、2色分割が役割を果たすことが期待される。

より一般に、任意のアフィン型と標準加群について、RRのような恒等式が得られるという期待（since 1970年代）の理解の進展が望まれる。Thank you!

（まとめ）　頂点作用素（表現論）の計算　（注：赤色は自動的）

→　2色分割の条件 R と R'

→　enhanceされた母関数 $f_R(x,q)$ と $f_{R'}(x,q)$ のq差分方程式

＝　4重の和をenhanceしてq差分方程式を導出

→　enhanceの仕方を変えてq差分方程式導出

＝　適当なプロファイルの円柱分割のenhanceされた母関数のq差分方程式

→　enhanceを忘れると（x=1にすると）無限積表示（Bordin積公式）

【質疑応答】

表現論的解釈について

ロジャーズ・ラマヌジャンの場合（Lepowsky–Wilson, Meurman–Primc）:

$$\mathfrak{g}(A_1^{(1)}) = \widehat{\mathfrak{sl}_2} = \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

について、{ B(n), X(n'), c, d | nは奇数, n' は整数 } は基底だが（プリンシパル実現 $B(n)=(e+f)\otimes t^n, \quad X(2k)=h\otimes t^{2k}, \quad X(2k+1)=(f-e)\otimes t^{2k+1}$）、

$$\{B(-\mu_1)\cdots B(-\mu_{\ell'})X(-\lambda_1)\cdots X(-\lambda_\ell)v_{(i+1)\Lambda_0+(2-i)\Lambda_1}\}$$

は、V((i+1)Λ_0 + (2−i)Λ_1)の基底である（i = 1,2）。ここで、小文字の v は対応する加群の最高ウェイトベクトルで、$\lambda = (\lambda_1,\cdots,\lambda_\ell)$ は i = 1,2 に応じて RR, RR' を走る。 $\mu = (\mu_1,\cdots,\mu_\ell)$ は奇数分割を走る。

Recall:
$$\sum_{\lambda\in RR} q^{|\lambda|} = \frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty} = \sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}, \qquad \sum_{\lambda\in RR'} q^{|\lambda|} = \frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty} = \sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n}$$

$$\mathrm{ch}V(2\Lambda_0+\Lambda_1) = \frac{1}{(q;q^2)_\infty}\frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty} = \frac{1}{(q;q^2)_\infty}\chi(V(2\Lambda_0+\Lambda_1))$$

$$\mathrm{ch}V(3\Lambda_0) = \frac{1}{(q;q^2)_\infty}\frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty} = \frac{1}{(q;q^2)_\infty}\chi(V(3\Lambda_0))$$

表現論的解釈について

今回の $A^{(1)}_2$ レベル3の場合([T, arXiv:2205.04811]):

$$\mathfrak{g}(A_2^{(1)}) = \widehat{\mathfrak{sl}_3} = \mathfrak{sl}_3 \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

について、{ B(n), X_+(n’), X_(n’), c, d | nは3で割り切れない, n’ は整数 } は基底だが(プリンシパル実現。具体的な元の形は省略)、

$$\{B(-\mu_1)\cdots B(-\mu_{\ell'})X_{\mathrm{color}(\lambda_1)}(-\mathrm{cont}(\lambda_1))\cdots X_{\mathrm{color}(\lambda_\ell)}(-\mathrm{cont}(\lambda_\ell))v_{(2i-1)\Lambda_0+(2-i)\Lambda_1} + (2-i)\Lambda_2\}$$

は、V((2i−1) Λ_0 + (2−i) Λ_1 + (2−i) Λ_2) の基底である(i = 1,2)。ここで v は対応する加群の最高ウェイトベクトルで、$\lambda = (\lambda_1,\cdots,\lambda_\ell)$ は i = 1,2 に応じて R, R’ を走る。$\mu = (\mu_1,\cdots,\mu_\ell)$ は3類正則分割(i.e.,パートが3で割れない)を走る。色がついていない自然数 n について color(n) = +, cont(n) = n と、色がついている自然数 n について color(n) = −, cont(n) = n と定義する。

Recall:

$$\mathrm{ch}V(\Lambda_0+\Lambda_1+\Lambda_2) = \frac{1}{(q,q^2;q^3)_\infty}\frac{(q^2,q^4;q^6)_\infty}{(q,q,q^3,q^3,q^5,q^5;q^6)_\infty}, \quad \mathrm{ch}V(3\Lambda_0) = \frac{1}{(q,q^2;q^3)_\infty}\frac{1}{(q^2,q^3,q^3,q^4;q^6)_\infty}$$

q差分方程式の自動導出についてのコメント

差条件＋禁止パターンで定義される C⊆Par の母関数

$$f_{\mathcal{C}}(x,q)=\sum_{\lambda\in\mathcal{C}} x^{\ell(\lambda)}q^{|\lambda|}$$
の、q差分方程式を立てる。

(e.g.)Rogers-Ramanujanの場合：$f_R(x,q)=f_R(xq,q)+xqf_R(xq^2,q)$

RRの場合、この方程式は「少し頭を使えば」容易に立てられる。しかし、Andrewsのリンク分割の理論を用いると、アルゴリズムで自動的にえられる！これは、ある種の超幾何和の閉形が **WZ法** で自動的にえられることに似ている(c.f.教科書『A=B』)。

q差分方程式の自動導出についてのコメント

差条件＋禁止パターンで定義される C⊆Par の母関数

$$f_{\mathcal{C}}(x,q)=\sum_{\lambda\in\mathcal{C}}x^{\ell(\lambda)}q^{|\lambda|}$$の、q差分方程式を立てる。

(e.g.)Rogers-Ramanujanの場合：$f_R(x,q)=f_R(xq,q)+xqf_R(xq^2,q)$

Rで1以下のパートを使ったものは $\pi_A=\phi$ と $\pi_B=(1)$ のみである。Rの元はAとBの無限列で、途中からAが無限個並ぶものと思える。(e.g.) $\lambda=(3,1)\in R$ は …AAABAB といった具合である。

Rの条件 $\lambda_i-\lambda_{i+1}\geqq 2$ は「BBが現れない」という禁止パターンに対応する。数学的な定義は行わないが、このように「有限の禁止パターンの無限文字列」にエンコードできるような $C\subseteq Par$ がリンク分割イデアルの大雑把な意味である。

有限の禁止パターンなので「AB*Aが現れない」のような無限個の禁止パターンを課すことができない（ここでB*はBの任意有限個の並びを表す正規表現である）。[Takigiku-T, arXiv:1910.12461]で「正規表現を禁止パターンとする無限文字列」にエンコードされる $C⊆Par$ についても母関数の差分方程式が立てられることを示した。

Rで1以下のパートを使ったものは $\pi_A=\phi$ と $\pi_B=(1)$ のみである。
Rの元はAとBの無限列で、途中からAが無限個並ぶものと思える。
(e.g.) $\lambda=(3,1)\in R$ は …AAABAB といった具合である。
Rの条件 $\lambda_i-\lambda_{i+1}\geqq 2$ は「BBが現れない」という禁止パターンに対応する。数学的な定義は行わないが、このように「有限の禁止パターンの無限文字列」にエンコードできるような $C⊆Par$ がリンク分割イデアルの大雑把な意味である。