定値四元数環上の代数的保型形式のトーラス周期について

若槻 聡
鈴木 美裕（金沢大学）, 横山 俊一（東京都立大学）との共同研究

金沢大学

２０２２年７月１日

講演内容　これは配布版のファイルなので §4 までです.

§1 定値四元数環と代数的保型形式

§2 トーラス周期について

§3 非消滅定理

§4 符号変化

§5 値の分布と中心極限定理

§6 表現付きの代数的保型形式（千田氏と共同研究中）

定値四元数環

- D：$\mathbb{Q}$ 上の定値四元数環.
- $D \ni x \mapsto x^\sigma \in D$：$D$ 上の標準的対合 σ.
- Nm：D 上のノルム. $\mathrm{Nm}(x) = x\,x^\sigma$. Nm は $D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ 上正定値.
- Tr：D 上のトレース. $\mathrm{Tr}(x) = x + x^\sigma$.
- $\mathrm{disc}(D)$：D の判別式, i.e., $D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ が斜体となる素数全体の積

有理数 $a,\, b \in \mathbb{Q}^\times$ に対して, 四元数環 $D = \left(\dfrac{a\,,\,b}{\mathbb{Q}}\right)$ は

$D = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i + \mathbb{Q}j + \mathbb{Q}ij,\ ij = -ji,\ i^2 = a,\ j^2 = b$ と与えられる.

$x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij \in D\ (x_* \in \mathbb{Q})$ について

$x^\sigma = x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 ij, \qquad \mathrm{Tr}(x) = 2x_1,$

$\mathrm{Nm}(x) = x_1^2 - ax_2^2 - bx_3^2 + abx_4^2, \qquad D$ は定値 $\Rightarrow a < 0,\ b < 0.$

- D 内の $\mathbb{Z}$ 格子 I とは, ある D の $\mathbb{Q}$ 基底 $\{v_j\}$ について $I = \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2 + \mathbb{Z}v_3 + \mathbb{Z}v_4$ と表されることをいう.
- $\mathcal{O}$: D の極大整環（$\mathbb{Z}$ 格子, 部分環, 極大）
- I は $\mathcal{O}$ の (右) 分数イデアルとは, I は $\mathbb{Z}$ 格子かつ $I\alpha \subset I$ $(\forall\alpha \in \mathcal{O})$ が成り立つことをいう.
- $\mathcal{O}$ の分数イデアル I, J について, 同値関係 $I \sim J$ が $\exists\alpha \in D^{\times}$, $\alpha I = J$ により定まる. その同値類全体を $\mathrm{Cl}(\mathcal{O})$ と書く.

例. $D = \left(\dfrac{-1\,,\,-1}{\mathbb{Q}}\right)$ ハミルトンの四元数体.

$$\mathcal{O} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}j + \mathbb{Z}w, \quad w = \frac{1+i+j+ij}{2}, \quad D_4 \text{ 格子.}$$

$\#\,\mathrm{Cl}(\mathcal{O}) = 1.$

- $G := \mathrm{PGL}_1(D)$（$\mathbb{Q}$ 上の代数群）．$\mathbb{Q}$ 代数 R について
  $G_R = (D \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times / R^\times$ となる．特に $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Aut}(D)$ が成立する．
- 射影：$(D \otimes R)^\times \ni x \mapsto \overline{x} \in G_R$, $(D \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \supset Y \mapsto \overline{Y} \subset G_R$.
- 素数 p について, $\mathcal{O}_p := \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$
- $K_\infty := \overline{G_{\mathbb{R}}}$, $K_p := \overline{\mathcal{O}_p^\times}$, $K = K_\infty \times \prod_p K_p$.
- $\mathbb{A}$ は $\mathbb{Q}$ のアデール環, $G_{\mathbb{A}} = G_{\mathbb{R}} \times \prod_p^{\mathrm{rest}} G_{\mathbb{Q}_p}$.

$\mathcal{O}$ は極大なので, 各分数イデアル I に対して, $I \otimes \mathbb{Z}_p = x_p \mathcal{O}_p$ となる $x_p \in D_p^\times$ が存在する．各 I に対して, $x_I := (\overline{x_v})_v \in G_{\mathbb{A}}$ $(x_\infty = 1)$ とおくと, 全単射

$$\mathrm{Cl}(\mathcal{O}) \ni [I] \xrightarrow{\sim} G_{\mathbb{Q}} x_I K \in G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}} / K$$

が得られる．以下, $[I]$ と $G_{\mathbb{Q}} x_I K$ を同一視する．

- N_v は K_v の正規化群, $N := \prod_v N_v$. $N/K \cong \prod_{p|\,\mathrm{disc}(D)} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}'$ は（$\mathbb{Z}$ 代数）同型 $\Leftrightarrow \exists\beta \in G_{\mathbb{Q}}$, $\mathcal{O}' = \beta\mathcal{O}\beta^{-1}$.
- $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}'$ は局所同型 $\Leftrightarrow \forall p$, $\exists y_p$, $\mathcal{O}'_p = y_p\mathcal{O}_p y_p^{-1}$.

各 $\mathcal{O}'$ に対して $y_{\mathcal{O}'} := (\overline{y_v})_v \in G_{\mathbb{A}}$ $(y_\infty = 1)$ とおくと, 全単射

$$\mathrm{Typ}(\mathcal{O}) \ni [\mathcal{O}'] \xrightarrow{\sim} G_{\mathbb{Q}} y_{\mathcal{O}'} N \in G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}}/N$$

が得られる. ただし, Typ($\mathcal{O}$) は $\mathcal{O}$ と局所同型な整環の同型類全体.

$\mathcal{O}$ の分数イデアル I に対して, $\mathcal{O}(I) := \{\alpha \in D \mid \alpha I \subset I\}$ により D の整環が定義される. $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}) \ni [I] \mapsto [\mathcal{O}(I)] \in \mathrm{Typ}(\mathcal{O})$ により次の可換図式を得る.

$$\begin{tikzcd} G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}}/K \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\wr"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}}/N \arrow[d, "\wr"] \\ \mathrm{Cl}(\mathcal{O}) \arrow[r, two heads] & \mathrm{Typ}(\mathcal{O}) \end{tikzcd}$$

保型形式

- $\mathcal{A}(\mathcal{O}) := \{\phi : \mathrm{Cl}(\mathcal{O}) \to \mathbb{C}\}$（代数的保型形式）．保型形式 ϕ は $\phi(\gamma x k) = \phi(x)$ $(\forall\gamma \in G_{\mathbb{Q}},\ x \in G_{\mathbb{A}},\ k \in K)$ を満たす $G_{\mathbb{A}}$ 上の関数と同一視される.
- $w_{[I]} := |G_{\mathbb{Q}} \cap x_I K x_I^{-1}|$ $([I] \in \mathrm{Cl}(\mathcal{O}))$.
- $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ 上の内積

$$(\phi_1, \phi_2) := \sum_{[I]\in\mathrm{Cl}(\mathcal{O})} w_{[I]}^{-1}\, \phi_1([I])\, \overline{\phi_2([I])}.$$

- $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ 上のヘッケ作用素 T_p（自己随伴）：

$$(T_p\phi)(x) := \int_{K_p \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right) K_p} \phi(xg)\, dg \quad (p \nmid \mathrm{disc}(D)).$$

- $\mathbb{1}$ は $\mathrm{Cl}(\mathcal{O})$ 上の定数関数.
- $\mathcal{S}(\mathcal{O}) := \{\varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{O}) \mid (\varphi, \mathbb{1}) = 0\}$（尖点形式）.
- $\mathcal{A}_N(\mathcal{O}) := \{\phi \in \mathcal{A}(\mathcal{O}) \mid \phi(xn) = \phi(x) \ \ (\forall n \in N,\ x \in G_{\mathbb{A}})\}$.
- $S_N(\mathcal{O}) := \mathcal{S}(\mathcal{O}) \cap \mathcal{A}_N(\mathcal{O})$.
- T_p は自己随伴であり, $N_p = K_p$ $(\forall p \nmid \mathrm{disc}(D))$ なので, T_p の作用で部分空間 $\mathcal{S}(\mathcal{O})$, $\mathcal{A}_N(\mathcal{O})$, $\mathcal{S}_N(\mathcal{O})$ は保たれる.
- $\{T_p\}_p$ は同時対角化可能であり, $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ の同時固有ベクトルをヘッケ固有形式と呼ぶ.
- ヘッケ固有形式 ϕ の固有値から成る代数体を ϕ のヘッケ体と呼ぶ.
- $\mathbf{o}_\phi$：ϕ のヘッケ体の整環
- ϕ を定数倍することで, ϕ は $\mathbf{o}_\phi$ に値を持つ.

注意. $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ は重さ 2, レベル $l = \mathrm{disc}(D)$ の正則尖点新形式の空間 $S_2^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(l))$ とヘッケ同型になる（by Eichler).

例. $D = \left(\dfrac{-11\,,\,-3}{\mathbb{Q}}\right)$, $\mathrm{disc}(D) = -11$.

$$\mathcal{O} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\frac{1+i}{2} + \mathbb{Z}j + \mathbb{Z}\frac{j+ij}{6}.$$

$\#\,\mathrm{Cl}(\mathcal{O}) = \#\,\mathrm{Typ}(\mathcal{O}) = 2$.
$\mathrm{Cl}(\mathcal{O}) = \{[I_1], [I_2]\}$, $w_{[I_1]} = 2$, $w_{[I_2]} = 3$.

$$\phi([I_1]) = 2, \quad \phi([I_2]) = -3,$$

によって代数的保型形式 ϕ を定義すると, $(\phi, \mathbb{1}) = 0$ となり,
$\mathcal{S}(\mathcal{O}) = \mathcal{S}_N(\mathcal{O}) = \mathbb{C}\,\phi$ が得られる.
1 次元なので ϕ はヘッケ固有関数であり, ϕ のヘッケ体は $\mathbb{Q}$, その整数環は $\mathbf{o}_\phi = \mathbb{Z}$ となる. （ϕ は楕円曲線に対応する. ）

2. トーラス周期について

- $X(D)$ は D に埋め込める虚 2 次体の集合とする.
  （埋め込みとは単射環準同型のこと）
- $E \in X(D)$ に対して, $\mathfrak{o}$ を E の一つの整環とする.

$$\mathrm{Emb}(\mathfrak{o}, \mathcal{O}) := \{\text{ 埋め込み } \iota : E \to D \mid \iota(E) \cap \mathcal{O} = \iota(\mathfrak{o})\}.$$

$\mathrm{Emb}(\mathfrak{o}, \mathcal{O})$ の元のことを $\mathcal{O}$ への $\mathfrak{o}$ の optimal embedding という.

- $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o})$: $\mathfrak{o}$ のイデアル類群
- $u_{\mathfrak{o}} := \#(\mathfrak{o}^{\times})/2$
- $\mathfrak{o}_p := \mathfrak{o} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ （素数 p）

- T を $\iota(E)$ によって定まる G のトーラスとする. $T_{\mathbb{Q}} \cong \overline{E^\times}$.
- $U_p = \overline{\iota(\mathfrak{o}_p^\times)}$, $U_\infty := T_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times$, $U := U_\infty \times \prod_p U_p$.
- ι は $T_{\mathbb{Q}}\backslash T_{\mathbb{A}}/U$ から $G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}}/K$ への写像を誘導する.
- $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}) \cong T_{\mathbb{Q}}\backslash T_{\mathbb{A}}/U$, $[\mathfrak{a}] \mapsto T_{\mathbb{Q}} z_{\mathfrak{a}} T_{\mathbb{A}}$. ただし, $\mathfrak{a}_p = z_p \mathfrak{o}_p$, $z_{\mathfrak{a}} := (z_p)_p$.
- 従って, $\iota \in \mathrm{Emb}(\mathfrak{o}, \mathcal{O})$ と下記の可換図式より写像 $i : \mathrm{Cl}(\mathfrak{o}) \to \mathrm{Cl}(\mathcal{O})$ が得られる.

$$\begin{tikzcd} T_{\mathbb{Q}}\backslash T_{\mathbb{A}}/U \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}}/K \arrow[d, "\wr"] \\ \mathrm{Cl}(\mathfrak{o}) \arrow[r, "i"'] & \mathrm{Cl}(\mathcal{O}). \end{tikzcd}$$

以下, ι と i は同一視する.

Definition (トーラス周期)

$\iota \in \mathrm{Emb}(\mathfrak{o}, \mathcal{O})$ と $\phi \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$ に関するトーラス周期 $\mathcal{P}_{\iota,\mathfrak{o}}(\phi)$ を

$$\mathcal{P}_{\iota,\mathfrak{o}}(\phi) := \frac{1}{u_{\mathfrak{o}}} \sum_{[\mathfrak{a}]\in \mathrm{Cl}(\mathfrak{o})} \phi(\iota([\mathfrak{a}])) = \frac{1}{u_{\mathfrak{o}}} \sum_{[I]\in \mathrm{Cl}(\mathcal{O})} \#\iota^{-1}([I])\,\phi([I])$$

により定義する.

$\phi \in \mathcal{A}_N(\mathcal{O})$ に対しては,

$$\mathcal{P}_{\iota,\mathfrak{o}}(\phi) = \frac{1}{u_{\mathfrak{o}}} \sum_{[\mathcal{O}']\in \mathrm{Typ}(\mathcal{O})} \#\iota^{-1}([\mathcal{O}'])\,\phi([\mathcal{O}'])$$

となる. ただし, この式の ι は自然な射影 $G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}}/K \to G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}}/N$ と ι の合成としている.

Theorem (Waldspurger's formula)

ヘッケ固有形式 $\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{O})$ について次の等式が成立する.

$$|\mathcal{P}_{\iota,\mathfrak{o}}(\phi)|^2 = \frac{\zeta(2)L(\frac{1}{2},\pi')L(\frac{1}{2},\pi'\otimes\eta_E)}{L(1,\eta_E)^2 L(1,\pi',\mathrm{Ad})} \times \prod_v \alpha^{\natural}_{\iota,E_v}(\phi_v)$$

- $\pi = \pi_\phi = \otimes_v \pi_v$ は $\phi = \otimes_v \phi_v$ で生成される $G_{\mathbb{A}}$ の保型表現とする.
  $\pi' = \pi'_\phi = \otimes_v \pi'_v$ は π の JL 対応による $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ の保型表現とする.
- $L(s,\pi') = \prod_v L(s,\pi'_v)$ は π' の L 関数とする. $(T_p\phi = \lambda_p\phi)$
  $p \nmid \mathrm{disc}(D)$ のとき $L(s,\pi'_p) = (1-\lambda_p p^{-s-\frac{1}{2}} + p^{-2s})^{-1}$,
  $p \mid \mathrm{disc}(D)$ のとき $L(s,\pi'_p) = (1 \pm p^{-s-\frac{1}{2}})^{-1}$ $(\phi \in \mathcal{S}_N(\mathcal{O}) \Rightarrow -)$,
  $L(s,\pi'_\infty) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s+\frac{1}{2})$.
- η_E は E に対応する $\mathbb{R}_{>0}\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ 上の 2 次指標とする.
- $\alpha^{\natural}_{\iota,E_v}(\phi_v)$ は正規化された局所周期. ほとんど 1.

- 分数イデアル I について $L_I = \{x \in \mathbb{Z} + 2\mathcal{O}(I) \mid \mathrm{Tr}(x) = 0\}$ とおく.
- $\mathfrak{H}$：上半平面
- $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}) \times \mathfrak{H}$ 上のテータ関数 $\theta_{\mathcal{O}}$ を次のように定める.

$$\theta_{\mathcal{O}}([I], z) = \sum_{x \in L_I} q^{\mathrm{Nm}(x)}, \qquad q = e^{2\pi\sqrt{-1}z},$$

$\theta_{\mathcal{O}}([I])$ は $\mathrm{Typ}(\mathcal{O})$ で定まる重さ $3/2$ の正則保型形式である.

Definition (Classical Wldspurger's lift)

$$\mathcal{W}(\phi, z) = (\phi, \overline{\theta_{\mathcal{O}}(-, z)}), \qquad \phi \in \mathcal{A}(\mathcal{O}), \ \ z \in \mathfrak{H}.$$

$\mathrm{disc}(D)$ は奇数とする.

$\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{O})$ について $\mathcal{W}(\phi)$ は重さ $3/2$, レベル $4\,\mathrm{disc}(D)$ の正則カスプ形式であり, $\phi \in \mathcal{S}_N(\mathcal{O})^{\perp}$ について $\mathcal{W}(\phi) = 0$ となる.

この構成は B. Gross によるもので, Böcherer–Schulze-Pillot により基底定理が示されている.

- $\mathfrak{o}_E$：E の整数環（極大整環）
- Δ_E：E の判別式 ($\Delta_E < 0$)

Lemma

$\phi \in \mathcal{A}_N(\mathcal{O})$ とする．ι_1, $\iota_2 \in \mathrm{Emb}(\mathfrak{o}_E, \mathcal{O})$ について $\mathcal{P}_{\iota_1,\mathfrak{o}_E}(\phi) = \mathcal{P}_{\iota_2,\mathfrak{o}_E}(\phi)$ となる．

この補題より, $\phi \in \mathcal{A}_N(\mathcal{O})$ と $E \in X(D)$ について, 次のように置ける．

$$\mathcal{P}_E(\phi) := \mathcal{P}_{\iota,\mathfrak{o}_E}(\phi) \ \text{ if } \iota \in \mathrm{Emb}(\mathfrak{o}_E, \mathcal{O}), \quad := 0 \ \text{ if } \mathrm{Emb}(\mathfrak{o}_E, \mathcal{O}) = \emptyset.$$

- $a_\phi(n)$：$\mathcal{W}(\phi)$ の n 番目のフーリエ係数. $\mathcal{W}(\phi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_\phi(n) q^n$.
  $n \notin \{|\Delta_E| m^2 \mid E \in X(D),\, m \in \mathbb{N}\} \supset \mathrm{Nm}(L_I)$ について $a_\phi(n) = 0$.
- $c(E) := \displaystyle\prod_{p \mid \mathrm{disc}(D)} \left(1 - \left(\frac{\Delta_E}{p}\right)\right)$.
  (虚 2 次体 E について, $E \in X(D) \Leftrightarrow c(E) \neq 0$).

$\phi \in \mathcal{S}_N(\mathcal{O})$ はヘッケ固有形式とする.

Theorem (Suzuki-W.-Yokoyama)

$$a_\phi(|\Delta_E|) = c(E)\,\mathcal{P}_E(\phi) \quad (\forall E \in X(D)).$$

π は ϕ で生成される $G_{\mathbb{A}}$ の保型表現とする. π 上の線形汎関数 $P_E : \pi \to \mathbb{C}$ を $P_E(\varphi) := \int_{T_{\mathbb{Q}} \backslash T_{\mathbb{A}}} \varphi(t)\,dt$ $(\varphi \in \pi)$ によって定義する.

Theorem (S.-W.-Y.)

$E \in X(D)$ に関する次の三つの条件は同値である.

(1) $P_E \not\equiv 0$ on π.

(2) $\mathcal{P}_E(\phi) \neq 0$.

(3) $a_\phi(|\Delta_E|) \neq 0$.

3. 非消滅定理

楕円曲線の階数に関する Goldfeld 予想を保型 L 関数に関する予想に書き直すと次のようになる.

Conjecture (Automorphic (Weak) Goldfeld)

X：2 次体全体の集合.

π'：$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ のカスピダル保型表現.

(1) $E \in X$ のうちの 50%について中心値 $L(\frac{1}{2}, \pi' \otimes \eta_E)$ は消えない.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\#\{E \in X \mid |\Delta_E| < x,\ L(\frac{1}{2}, \pi' \otimes \eta_E) \neq 0\}}{\#\{E \in X \mid |\Delta_E| < x\}} = \frac{1}{2}.$$

(2) (Weak) $L(\frac{1}{2}, \pi' \otimes \eta_E) \neq 0$ となる $E \in X$ は正の割合で存在する.

$$\#\{E \in X \mid |\Delta_E| < x,\ L(\tfrac{1}{2}, \pi' \otimes \eta_E) \neq 0\} \gg x.$$

Waldspurger formula より $\mathcal{P}_E(\phi) \neq 0 \Rightarrow L(\frac{1}{2}, \pi'_\phi \otimes \eta_E) \neq 0$ が成り立つ.
この事実を用いて, Weak Goldfeld 予想の例を作る.
$\mathcal{O}$ の mass は次のように定義される.

$$\mathrm{mass}(\mathcal{O}) := (\mathbb{1}, \mathbb{1}) = \sum_{[I] \in \mathrm{Cl}(\mathcal{O})} \frac{1}{w(x_{[I]})}.$$

$\mathrm{mass}(\mathcal{O})$ に対する Eichler の mass 公式が知られている.

$$\mathrm{mass}(\mathcal{O}) = \frac{1}{12} \prod_{p | \mathrm{disc}(D)} (p-1).$$

Lemma (K. Martin, M.-W.)

p は奇素数とし, $p \mid \mathrm{mass}(\mathcal{O})$ を仮定する. このとき, $\mathcal{S}_N(\mathcal{O})$ 内の保型形式で $1 + p\mathbb{Z}$ に値を取るものが存在する.

- $F_{N,\mathcal{O}}$：$S_N(\mathcal{O})$ のヘッケ固有形式全体のヘッケ体からなる $\mathbb{Q}$ 上のガロワ拡大.
- $\varphi^\sigma(x) := \varphi(x)^\sigma \ (\varphi \in \mathcal{S}_N(\mathcal{O}),\, \sigma \in \mathrm{Gal}(F_{N,\mathcal{O}}/\mathbb{Q}))$.
- $h_E := \#(\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_E)) \ (E \in X)$：$E$ の類数
- $\{\phi_i\}$ はヘッケ固有形式からなる $\mathcal{S}_N(\mathcal{O})$ の基底とする.

Proposition

ある i について $\mathcal{S}_N(\mathcal{O})$ は $\{\phi_i^\sigma\}_{\sigma\in\mathrm{Gal}(F_{N,\mathcal{O}}/\mathbb{Q})}$ で貼られることを仮定する. $E \in X(D)$ を一つとり, $\mathrm{Emb}(\mathfrak{o}_E, \mathcal{O}) \neq \emptyset$ を仮定する. 奇素数 p が $\mathrm{mass}(\mathcal{O})$ を割り, h_E を割らないならば, $\mathcal{P}_E(\phi_j) \neq 0 \ (\forall j)$ が成り立つ.

上述の補題より $1 + p\mathbb{Z}$ に値をとる $\varphi \in \mathcal{S}_N(\mathcal{O})$ が存在する.
$u_{\mathfrak{o}_E}\mathfrak{P}_E(\varphi) \equiv h_E \not\equiv 0 \pmod{p}$ なので $\mathfrak{P}_E(\varphi) \neq 0$ をえる.
$\varphi = \sum_\sigma a_\sigma \phi_i^\sigma \ (a_\sigma \in \mathbb{C})$ とすると,

$$\mathcal{P}_E(\varphi) = \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(F_{N,\mathcal{O}}/\mathbb{Q})} a_\sigma \mathcal{P}_E(\phi_i^\sigma) = \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(F_{N,\mathcal{O}}/\mathbb{Q})} a_\sigma \mathcal{P}_E(\phi_i)^\sigma.$$

つまり, ある σ について $\mathcal{P}_E(\phi_i)^\sigma \neq 0$ が従う. Q.E.D.

Theorem (S.-W.-Y.)

次の二つの条件を仮定する.

(a) ある i について $\mathcal{S}_N(\mathcal{O})$ は $\{\phi_i^\sigma\}_{\sigma\in\mathrm{Gal}(F_{N,\mathcal{O}}/\mathbb{Q})}$ で貼られる.

(b) $3 \mid \mathrm{mass}(\mathcal{O})$.

このとき, ヘッケ固有形式 $\phi \in \mathcal{S}_N(\mathcal{O})$ について次が成り立つ.

$$\#\{E \in X(D) \mid |\Delta_E| < x,\ \mathcal{P}_E(\phi) \neq 0\} \gg x.$$

つまり, カスピダル保型表現 π'_ϕ の *Weak Goldfeld* も成立する.

証明には類数が 3 で割れない虚 2 次体が正の割合で存在することを用いる（James et. al. による楕円曲線の Weak Goldfeld 予想の証明でも使われたアイデア）. $p = 3$ とした上述の命題と Duke の定理「有限個の E を除いて $\mathrm{Emb}(\mathfrak{o}_E, \mathcal{O}) \neq \emptyset$」から主張が導かれる. Q.E.D.

定理の条件が満たされるような $\mathrm{disc}(\mathcal{O})$ の例（素数）.

19, 37, 127, 163, 181, 271, 379, 523, 541, 613, 631, 757, 811, 829, 883, 919, 937, 991, 1009, 1117, 1279, 1423, 1459, 1549, 1657, 1747, 1783, 1801, 2017, 2053, 2161, 2179, 2269, 2287, 2377, 2467, 2503, 2521, 2539, 2557, 2647, 2683, 2719, 2791, 2971, 3061, 3079, 3169, 3187, 3457, 3511, 3529, 3637, 3673, 3691, 3709, 3727, 3853, 3889, 4051, 4159, 4177, 4231, 4447, 4519, 4591, 4663, 4789, 4861, 4933, 4969, 4987, 5023, 5059, 5077, 5113, 5167, 5437, 5527, 5563, 5581, 5653, 5743, 5779, 5851, 5869, 5923, 6121, 6229, 6247, 6301, 6373, 6427, 6481, 6553, 6607, 6661, 6679, 6733, 6823, 6841, 6967, 7039, 7129, 7219, 7237, 7309, 7417, 7489, 7507, 7561, 7687, 7741, 7759, 7993, 8011, 8101, 8191, 8209, 8263, 8317, 8353, 8389, 8443, 8461, 8623, 8641, 8677, 8713, 8731, 8803, 8821, 8839, 8893, 8929, 9001, 9091, 9109, 9181, 9199, 9343, 9397, 9433, 9613, 9631, 9649, 9721, 9739, 9883, 9973……

4. 符号変化

ヘッケ固有形式 $\phi \in \mathcal{S}_N(\mathcal{O})$ を一つとる．ϕ のヘッケ体は総実体なので，$\mathbb{R}$ への埋め込みを一つ固定して，ϕ は $\mathbb{R}$ に値を持つとしてよい．さらに，$L(\frac{1}{2}, \pi'_\phi) \neq 0$ も仮定する．このとき，$\{E \in X(D) \mid \mathcal{P}_E(\phi) \neq 0\}$ は無限集合になることは分かっている．

Theorem (S.-W.-Y.)

列 $\{\mathcal{P}_E(\phi) \in \mathbb{R}\}_{E \in X(D)}$ は無限回符号変化する．

証明には $\mathcal{W}(\phi)$ のメリン変換を用いる．

$$D(s, \mathcal{W}(\phi)) := \int_0^\infty \mathcal{W}(\phi, y\sqrt{-1})\, y^{s-1}\, dy.$$

$\mathcal{W}(\phi)$ が重さ 3/2 の正則カスプ形式であることから，$D(s, \mathcal{W}(\phi))$ が $\mathbb{C}$ 上解析接続され，関数等式を持つことがわかる．

次の命題は $|\Delta_E|$ 番目以外の $\mathcal{W}(\phi)$ のフーリエ係数を計算することで得られる.

Proposition

$$D(s,\mathcal{W}(\phi)) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L_{\mathrm{fin}}(2s-\tfrac{1}{2},\pi'_\phi)\sum_{E\in X(D)}\frac{c(E)\,\mathcal{P}_E(\phi)}{L^S(2s,\eta_E)|\Delta_E|^s}.$$

ただし, $L_{\mathrm{fin}}(s,\pi'_\phi)$ は無限素点の因子を除いた L 関数で, $L^S(s,\eta_E)$ は無限素点と $\mathrm{disc}(D)$ の素因数の素点の因子を除いた L 関数とする.

この命題と以前に証明した $\sum_E|\mathcal{P}_E(\phi)|^2$ の平均値定理と $D(s,\mathcal{W}(\phi))$ の正則性から符号変化の定理が導かれる. Q.E.D.

注意. 重さが $3/2$ より大きい正則カスプ形式のフーリエ係数の符号変化に関しては様々な結果が既にある.