代数体上の星座定理

吉野聖人

東北大学

関真一朗，見村万佐人，甲斐亘，宗政昭弘との共同研究に基づく．

arXiv:2012.15669

1. 先行研究
   - 一次元の世界
   - 多次元の世界
   - 主定理
   - 最近の発展
2. 基本図式
3. 密度評価
4. 擬ランダム性
5. 組合せ論のはなし

Theorem (Semérdi, 1975)

部分集合 $A \subset \mathbb{Z}$ が

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\#(A \cap [-N, N])}{2N} > 0$$

を満たすとき，A は任意の長さの AP (= arithmetic progression) を含む．

1. Gowers や Tao らによってどのくらいの密度があれば，どのくらいの N で等差数列が見つかるかも評価されている．
2. N 以下の素数の個数 $\pi(N)$ は大体 $N/\log N$ くらいだから，Semréredi の定理を用いて，素数の中に任意の長さの AP が存在することは示せない．

素数全体の集合を $\mathcal{P}$ で表す.

Theorem (Green-Tao 2008, arxiv 2004)

部分集合 $A \subset \mathcal{P}$ が

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\#(A \cap [-N, N])}{\#(\mathcal{P} \cap [-N, N])} > 0$$

を満たすとき，A は任意の長さの AP を含む.

Example

- 長さ 4 の場合は：5,11,17,23.
- 世界記録は長さ 27 である.

多次元の世界

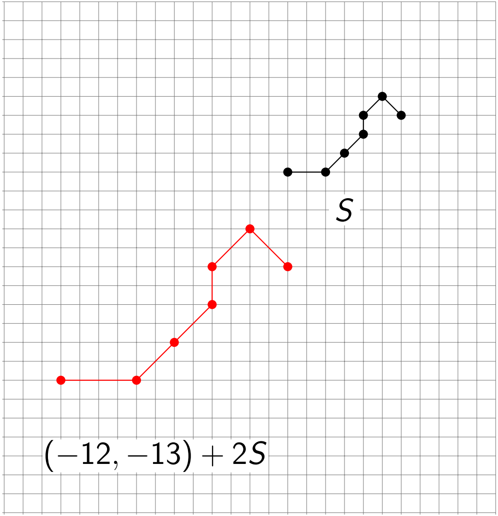
- $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$,
- $[N] := \{1, \ldots, N\}$,
- $[-N, M] := \{x \in \mathbb{N} : -N \leq x \leq M\}$.

Definition

有限生成自由 $\mathbb{Z}$-加群 $\mathcal{Z}$ をとる．

1. 有限部分集合 $S \subset \mathcal{Z}$，$k \in \mathbb{N}$ と $a \in \mathcal{Z}$ に対して，
$$a + kS := \{a + ks : s \in S\}$$
を S-星座と呼ぶ．
2. $A \subset \mathcal{Z}$ が星座定理 (Constellation theorem, CT) を満たす $:\Longleftrightarrow$ 有限部分集合 $\forall S \subset \mathcal{Z}$ に対して，A は S-星座を含む．

S-星座の例



有限生成自由 $\mathbb{Z}$-加群 $\mathcal{Z}$ とその基底 $\omega = (v_1, \ldots, v_n)$ をとる．
任意の $x = \sum x_i v_i$ に対して，

$$\|x\|_{\omega,\infty} := \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$$

と定め，

$$\mathcal{Z}(\omega, N) := \{x \in \mathcal{Z} : \|x\|_{\omega,\infty} \leq N\}$$

とおく．部分集合 $A \subset B \subset \mathcal{Z}$ に対して，

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\#(A \cap \mathcal{Z}(\omega, N))}{\#(B \cap \mathcal{Z}(\omega, N))} > 0$$

が成り立つとき，（$\mathcal{Z}$ 内で）A は B に対して密であるという．

Example

$\mathcal{Z} := \mathbb{Z}$, $S = [k]$ とすると，S-星座とは等差数列のこと．
Green-Tao の定理 $\Longleftrightarrow$ 部分集合 $A \subset \mathcal{P}$ が $\mathcal{P}$ に対して密ならば A は CT を満たす．

Theorem (Furstenberg-Katznelson 1978)

$A \subset \mathbb{Z}^n$ が $\mathbb{Z}^n$ に対して密ならば，A は CT を満たす．

Definition

代数体 K をとる．
整数環を $\mathcal{O}_K$，素元全体を $\mathcal{P}_K$ で表す．

代数体とは $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体である．
整数環 $\mathcal{O}_K$ とは K の元で $\mathbb{Z}$ 上整な元全体である．
$\mathcal{O}_K$ は階数 $[K:\mathbb{Q}]$ の自由 $\mathbb{Z}$-加群である．

Theorem (Tao, 2006)

$A \subset \mathcal{P}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}$ が $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ 内で $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}$ に対して密ならば，A は CT を満たす．

Conjecture

Tao は次のような予想をした：

(I) $A \subset \mathcal{P}^n \subset \mathbb{Z}^n$ が $\mathcal{P}^n$ に対して密ならば，A は CT を満たす．

(II) K を任意の数体とする．
$A \subset \mathcal{P}_K$ が $\mathcal{P}_K$ に対して密 $\Rightarrow A$ は CT を満たす．

Theorem (Cook-Magyar-Titchetrakun 2018, Tao-Ziegler 2015, Fox-Zhao 2015)

Conjecture (I) は正しい．

Tao は少なくとも次のような場合には $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ の場合と同様に証明できると考えた：数体 K に対して

- 類数 $h(K) = \#\{$ 分数イデアル $\}/\{$ 単項イデアル $\} = 1$.
- $\#(\mathcal{O}_K^\times) < \infty$ ($\Rightarrow$ 虚二次体 or $\mathbb{Q}$).

Baker-Stark-Heegner の定理からこのような数体はちょうど $9+1$ 個しかない.

Definition

$\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K$ が同伴である $:\iff \mathcal{O}_K^\times \alpha = \mathcal{O}_K^\times \beta$.

Theorem (Kai-Mimura-Munemasa-Seki-Y.)

Conjecture (II) は正しい.
部分集合 $A \subset \mathcal{P}_K$ は $\mathcal{P}_K$ に対して密であるとする．このとき，A は CT を満たす
特に星座はは同伴なペアを含まないようにできる.

二次形式への応用として次が得られる：

Theorem (Kai-Mimura-Munemasa-Seki-Y.)

二次形式 $F(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 \in Z[x,y]$ $(a \in \mathbb{N})$ は *nondegenerate* かつ *primitive* であるとする．部分集合 $A \subset F^{-1}(\mathcal{P}) \subset \mathbb{Z}^2$ が $F^{-1}(\mathcal{P})$ に対して密であるならば，A は CT を満たす．さらに，任意の有限集合 $S \subset \mathbb{Z}^2$ に対して，ある S-星座 $\mathcal{S}$ が存在し以下を満たす：

1. $F|_{\mathcal{S}}$ は単射．
2. $F(\mathcal{S})$ の元たちは近い：$\forall \eta > 0, \forall \theta \in (0,1)$, $\exists \mathcal{S}$: S-星座 *s.t.* $\forall p_1, p_2 \in F(\mathcal{S})$,

$$\frac{|p_1|}{|p_2|} \leq 1 + \eta \left(\min\{|p| : p \in F(\mathcal{S})\}\right)^{\frac{\theta-1}{2}}.$$

Conjecture (Erdös-Turán)

$A \subset \mathbb{N}$. $\sum_{a \in A} \frac{1}{a} = \infty \Rightarrow A$ は任意の長さの等差数列を含む．

$$\sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq x} 1/p \approx \log \log x$$

だから，予想が正しければ Green-Tao の定理が従う．

Theorem (Bloom-Sisask)

$\exists c > 0$ *s.t.* $\forall A \subset \mathbb{Z}$

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{\#(A \cap [-N, N])}{N(\log N)^{-(1+c)}} > 0$$

ならば，A は無数に長さ 3 の等差数列を含む．

1. 系として Erdös-Turán 予想の長さ 3 のケースが従う !!!
2. 多次元版や長さ 4 以上の場合は未解決．

1. 先行研究
   - 一次元の世界
   - 多次元の世界
   - 主定理
   - 最近の発展
2. 基本図式
3. 密度評価
4. 擬ランダム性
5. 組合せ論のはなし

基本図式

Theorem (Kai-Mimura-Munemasa-Seki-Y.)

部分集合 $A \subset \mathcal{P}_K$ は $\mathcal{P}_K$ に対して密であるとする．
任意の有限集合 $S \subset \mathcal{O}_K$ に対して，A は同伴なペアを含まない S-星座 $\mathcal{S}$ を含む．

$$
\begin{tikzcd}
& & & A \arrow[d, phantom, "\bigcap" description, "\text{dense}"] & \\
E \arrow[d, phantom, "\bigcap" description] & C \arrow[d, phantom, "\bigcap" description] & B \arrow[d, phantom, "\bigcap" description] & \mathcal{P}_K \cap \underset{\text{(NLC)}}{\mathcal{D}} \arrow[d, phantom, "\bigcap" description] & \\
V \arrow[r, "T"] \arrow[rrrd, "\nu"] & \mathbb{Z}^r \arrow[r, "\phi_S"] & (\mathcal{O}_K, \|\cdot\|_{\infty,\omega}, N) \arrow[r, "\mathrm{Aff}_{W,b}"] \arrow[rd, "\tilde{\lambda}"] & (\mathcal{O}_K, \|\cdot\|_{\infty,\omega}, M) \arrow[r, equal, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\lambda"'] & (\mathcal{O}_K, \mathbf{N}, L) \\
& & & \mathbb{R} &
\end{tikzcd}
$$

組合せ論の議論をして次を得る．

Theorem (公理化)

$A \subseteq \mathcal{O}_K$ が, 以下の 2 条件を満たすとする.

1. (i) 不等式

$$\limsup_{M\to\infty} \frac{\#(A\cap\mathcal{O}_K(\omega, M))}{M^n(\log M)^{-1}} > 0 \tag{2.1}$$

を満たす;

2. (ii) $A \in \mathrm{S}\Psi_{\log}(\mathcal{O}_K)$ である.

このとき, A の元のみで構成される $\mathcal{O}_K$ 内の任意の形状の星座が存在する.

(i) は密度がそれなりにあるということ
$\to$NLC$+$Chebotarev の密度定理
(ii) は集合 A が擬ランダムであること
$\to$Goldston–Yıldırım type asymptotic formula．

密度評価：NLC

K は次数 n の代数体．

Definition (NL-compatibility)

部分集合 $X \subseteq \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$ が *NL-compatible* とは，ある K の整基底 $\boldsymbol{\omega}$ と定数 $C = C(\boldsymbol{\omega}, X) > 0$ が次を満たす．

$$C\|\alpha\|_{\infty,\boldsymbol{\omega}}^{n} \leq \mathbf{N}(\alpha) \qquad (\forall \alpha \in X)$$

NL-compatible な $\mathcal{O}_K \setminus \{0\}$ の $\mathcal{O}_K^{\times}$-基本領域上で星座を探す．

密度評価：NLC

NL-compatible ではない $\mathcal{O}_K^\times$-基本領域 $\mathcal{D}$ 上ではある形状の星座が取れないこともある．

Example

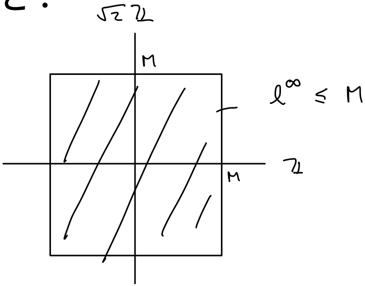
$K := \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\omega := \{1, \sqrt{2}\}$, $\varepsilon := 1 + \sqrt{2}$.
$\mathcal{O}_K^\times = \langle -1, \varepsilon \rangle$.
$(\mathcal{O}_K \setminus \{0\})/\mathcal{O}_K^\times$ の完全代表系 $a_1, a_2, \ldots$ をとる．
$\exists n_i \in \mathbb{N}$ s.t.

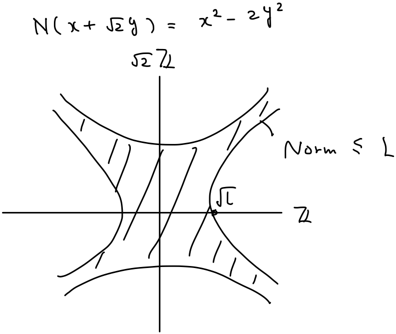
$$3\|\alpha_i\|_{\omega,\infty} < \|\alpha_{i+1}\|_{\omega,\infty} \qquad (\forall i).$$

ただし，$\alpha_i := \pm\varepsilon^{n_i} a_i$.
このようにすれば，$\{-1, 0, 1\}$-星座を α_i で作ることができない.

密度評価:NLC+Chebotarev

図で書くと：





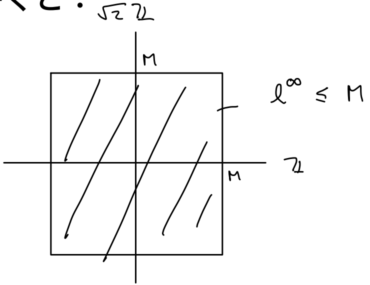
数の幾何で NL-compatible な $\mathcal{O}_K^\times$-基本領域をひとつ構成できる．

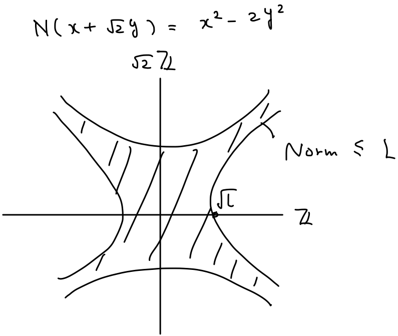
$$\lim_{L\to\infty} \frac{\#\{\mathfrak{a} \in \mathrm{Ideals}_K : \mathbf{N}(\mathfrak{a}) \leq L\}}{L} = \kappa > 0.$$

によって，$A \subset \mathcal{P}_K$ が NLC に帰着できる．

密度評価:NLC+Chebotarev

図で書くと：





数の幾何で NL-compatible な $\mathcal{O}_K^\times$-基本領域をひとつ構成できる．

$$\lim_{L\to\infty} \frac{\#\{\mathfrak{a} \in \mathrm{Ideals}_K : \mathbf{N}(\mathfrak{a}) \leq L\}}{L} = \kappa > 0.$$

によって，$A \subset \mathcal{P}_K$ が NLC に帰着できる．

密度評価:NLC+Chebotarev

Theorem (Chebotarevの密度定理の特別な場合)

Denote by $|\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)|^{\mathrm{PI}}$ *the set of non-zero principal prime ideals of* $\mathcal{O}_K$*. Let* h *be the class number of* K*. Then*

$$\#\{\mathfrak{p} \in |\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)|^{\mathrm{PI}} : \mathbf{N}(\mathfrak{p}) \leq L\} = (1 + o_{L\to\infty;K}(1)) \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{L}{\log L}.$$

Theorem (（有限版）多次元 Szemerédi の定理)

n を正整数とし, δ を正の数, S を $\mathbb{Z}^n$ の有限部分集合とする．このとき, 正整数 $N_{\mathrm{MS}}(\delta, S)$ が存在して, 以下が成立する:
$N \geq N_{\mathrm{MS}}(\delta, S)$ とし, 部分集合 $B \subseteq [-N, N]^n$ が

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_B \mid [-N, N]^n) \geq \delta$$

を満たすならば, B 内の S-星座が存在する.

これを相対化したい．記号を用意．
$S \subset \mathcal{Z} := \mathcal{O}_K$: 有限部分集合.
$r := \#S + 1$.
$e_j := [r+1] \setminus \{j\}$.

Theorem（（有限版）多次元 Szemerédi の定理）

n を正整数とし, δ を正の数, S を $\mathbb{Z}^n$ の有限部分集合とする．このとき, 正整数 $N_{\mathrm{MS}}(\delta, S)$ が存在して, 以下が成立する:
$N \geq N_{\mathrm{MS}}(\delta, S)$ とし, 部分集合 $B \subseteq [-N, N]^n$ が

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_B \mid [-N, N]^n) \geq \delta$$

を満たすならば, B 内の S-星座が存在する.

これを相対化したい．記号を用意．
$S \subset \mathcal{Z} := \mathcal{O}_K$: 有限部分集合.
$r := \#S + 1$.
$e_j := [r+1] \setminus \{j\}$.

Definition ((ρ, N, S)-線形形式条件)

$\omega = (\omega_i)_{i \in e_j} \in \bigsqcup_{j \in [r+1]} \{0,1\}^{e_j}$.
$\psi_S^{(\omega)} \colon \mathbb{Z}^{2r+2} \to \mathcal{Z}$ の $\psi_S^{(\omega)}(a_1^{(0)}, \dots, a_{r+1}^{(0)}, a_1^{(1)}, \dots, a_{r+1}^{(1)})$ を定める：

$$\left(\sum_{i \in [r] \setminus \{j\}} (s_i - s_j) a_i^{(\omega_i)} \right) + s_j a_{r+1}^{(\omega_{r+1})} \text{ if } j \in [r], \quad \sum_{i \in [r]} s_i a_i^{(\omega_i)} \quad \text{o.w.}$$

$0 < \rho < 1$, $N \in \mathbb{N}$. 関数 $\tilde{\lambda} \colon \mathcal{Z} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が (ρ, N, S)-線形形式条件
$:\iff$ $\forall$ 各辺の長さが N 以上の超立方体 $\mathcal{B} \subset \mathbb{Z}^{r+1}$, $\forall n_\omega \in \{0,1\}$,

$$\left| \mathbb{E} \left(\prod_{j \in [r+1]} \prod_{\omega \in \{0,1\}^{e_j}} (\tilde{\lambda} \circ \psi_S^{(\omega)})^{n_\omega} \,\middle|\, \mathcal{B} \times \mathcal{B} \right) - 1 \right| \leq \rho.$$

この $\tilde{\lambda}$ のことを (ρ, N, S)-擬ランダム測度ともよぶ.

基本図式

$$
\begin{tikzcd}
 & & & A & \\
 & & & \cap \quad \text{dense} & \\
E & C & B & \mathcal{P}_K \cap \underset{\text{(NLC)}}{\mathcal{D}} & \\
\cap & \cap & \cap & \cap & \\
V \arrow[r, "T"] \arrow[drrr, "\nu"'] & \mathbb{Z}^r \arrow[r, "\phi_S"] & (\mathcal{O}_K, \|\cdot\|_{\infty,\boldsymbol{\omega}}, N) \arrow[r, "\mathsf{Aff}_{W,b}"] \arrow[dr, "\tilde{\lambda}"] & (\mathcal{O}_K, \|\cdot\|_{\infty,\boldsymbol{\omega}}, M) \arrow[r, equal, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\lambda"'] & (\mathcal{O}_K, \mathbf{N}, L) \\
 & & & \mathbb{R} &
\end{tikzcd}
$$

Theorem (相対多次元 Szemerédi の定理)

正の数 $\delta > 0$ に対し, 正の数 $\gamma = \gamma_{\mathrm{RMS}}(\omega, \delta, S)$, $\rho = \rho_{\mathrm{RMS}}(\omega, \delta, S)$ が存在して, 以下が成立する: N を正整数, λ を (ρ, N, S)-擬ランダム測度とし, 部分集合 $B \subseteq \mathcal{Z}(\mathbf{v}, N)$ が次の 2 条件を満たすと仮定する:

1. (Weighted density) $\mathbb{E}(\mathbf{1}_B \cdot \lambda \mid \mathcal{Z}(\mathbf{v}, N)) \geq \delta$,
2. (Smallness) $\mathbb{E}(\mathbf{1}_B \cdot \lambda^{r+1} \mid \mathcal{Z}(\mathbf{v}, N)) \leq \gamma N$.

このとき, B 内の S-星座が存在する.

素数からイデアルへの拡張

von Mangoldt 関数 $\Lambda(=\Lambda_K)$ は非零イデアル $\mathfrak{a} \in \mathrm{Ideals}_K$ に対して,

$$\Lambda(\mathfrak{a}) := \begin{cases} \log \mathbf{N}(\mathfrak{p}) & (\mathfrak{a}\text{ が素イデアル }\mathfrak{p}\text{ の冪のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外のとき}). \end{cases}$$

ノルム $\mathbf{N}$ の乗法性と Möbius の反転公式より

$$\Lambda(\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{a}} \mu(\mathfrak{b}) \log \left(\frac{\mathbf{N}(\mathfrak{a})}{\mathbf{N}(\mathfrak{b})} \right) = \log \mathbf{N}(\mathfrak{a}) \cdot \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{a}} \mu(\mathfrak{b}) \left(1 - \frac{\log \mathbf{N}(\mathfrak{b})}{\log \mathbf{N}(\mathfrak{a})} \right).$$

Goldston–Yıldırım 切断約数和：実数 $R > 0$ をとる.

$$\rightsquigarrow \quad \log R \cdot \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{a},\ \mathbf{N}(\mathfrak{b}) \le R} \mu(\mathfrak{b}) \left(1 - \frac{\log \mathbf{N}(\mathfrak{b})}{\log R} \right).$$

素数からイデアルへの拡張

$$\text{切断約数和}: \ \log R \cdot \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{a},\ \mathbf{N}(\mathfrak{b})\le R} \mu(\mathfrak{b}) \left(1 - \frac{\log \mathbf{N}(\mathfrak{b})}{\log R}\right).$$

Tao の工夫：

$1 - \frac{\log \mathbf{N}(\mathfrak{b})}{\log R}$ を $\max\{1-|x|, 0\}$ に $x = \frac{\log \mathbf{N}(\mathfrak{b})}{\log R}$ を代入したとみなす.
関数 $\max\{1-|x|, 0\}$ を C^∞ 級関数 χ で $[-1,1]_\mathbb{R}$ の中に台を持つものに取り替える.

$$\rightsquigarrow \Lambda_{R,\chi}(\mathfrak{a}) := \log R \cdot \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{a}} \mu(\mathfrak{b}) \chi\left(\frac{\log \mathbf{N}(\mathfrak{b})}{\log R}\right).$$

$\widehat{\chi}$ を, 関数 $x \mapsto e^x\chi(x)$ の Fourier 逆変換と定義する.

$$e^x\chi(x) = \int_\mathbb{R} \hat{\chi}(\xi) e^{-x\xi\sqrt{-1}} \mathrm{d}\xi.$$

Theorem (Goldston-Yıldılım 型漸近公式)

$m, t \in \mathbb{N}$. $\psi_1, \dots, \psi_m \colon \mathbb{Z}^t \to \mathcal{O}_K$: $\mathbb{Z}$-加群の準同型 s.t.

全ての $\mathrm{coker}(\psi_j)$ が有限であり, $\ker(\psi_j)$ 達の間に包含関係がない.

$\exists w_0 > 0,\ R_0 > 0,\ F_0 > 0$ s.t. $\forall w \geq w_0$, $\forall W \in \mathbb{Z}$: 素因子は $\mathcal{P}_{\leq w}$,
$\forall b_1, \dots, b_m \in \mathcal{O}_K$: W と互いに素, $\theta_1, \dots, \theta_m \colon \mathbb{Z}^t \to \mathcal{O}_K$ を定める

$$\theta_j(x) := \mathrm{Aff}_{W, b_j}(\psi_j(x)) = W\psi_j(x) + b_j.$$

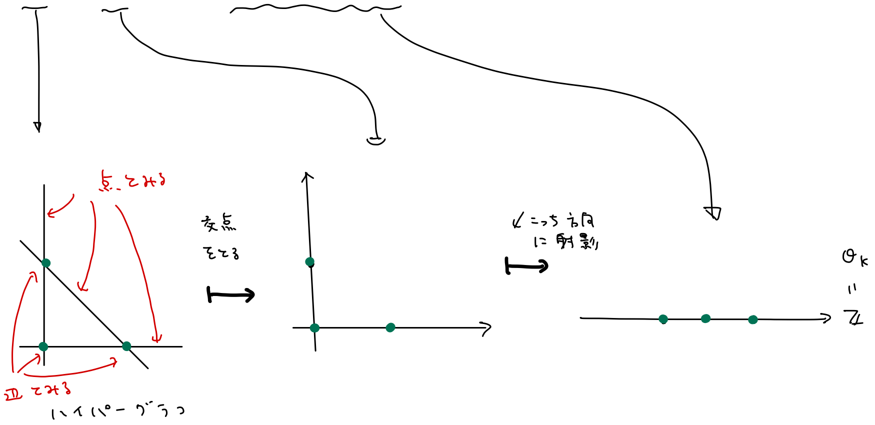
$R \geq R_0$. $I_i \subseteq \mathbb{Z}$: 長さ R^{4m+1} 以上の区間. $\mathcal{B} := I_1 \times \cdots \times I_t \subseteq \mathbb{Z}^t$.
このとき, $\log w \leq F_0 \cdot \sqrt{\log R}$ のもとで,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\Lambda_{R,\chi}(\theta_1(x))^2 \cdots \Lambda_{R,\chi}(\theta_m(x))^2 \mid x \in \mathcal{B}) \\ &= \left(1 + O_{m,n}\left(\frac{1}{w \log w}\right) + O_{\chi,m,t,K}\left(\frac{\log w}{\sqrt{\log R}}\right)\right) \cdot \left(\frac{W^n c_\chi \log R}{\varphi_K(W) \cdot \kappa}\right)^m \end{aligned}$$

1. 先行研究
   - 一次元の世界
   - 多次元の世界
   - 主定理
   - 最近の発展
2. 基本図式
3. 密度評価
4. 擬ランダム性
5. 組合せ論のはなし

星座とグラフの関係

$$V \xrightarrow{T} \mathbb{Z}^r \xrightarrow{\phi_S} (\mathcal{O}_K, \|\cdot\|_{\infty,\omega}, N) \xrightarrow{\mathrm{Aff}_{W,b}} (\mathcal{O}_K, \|\cdot\|_{\infty,\omega}, M) \xlongequal{\mathrm{id}} (\mathcal{O}_K, \mathbf{N}, L)$$

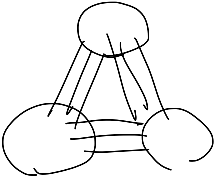


星座定理と除去補題

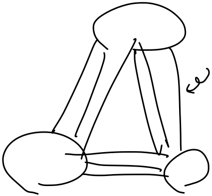
三角形 除去補題	$\to$	ハイパーグラフ 除去補題	$\to$	相対ハイパーグラフ 除去補題
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
Roth thm	$\to$	多次元 Szemerédi	$\to$	相対多次元 Szemerédi
$A \subset \mathbb{Z}$: 密 $\Rightarrow$ 3-AP $\subset A$		$A \subset \mathbb{Z}^n$: 密 $\Rightarrow A$: CT		$A \subset \mathbb{Z}^n$: 密, 擬ランダム $\Rightarrow A$: CT

考えるもの

ふつうの
グラフ



ハイパーグラフ



擬ランダムな
重みをのせる

重みつきハイパーグラフ

簡単な除去補題

Theorem (多次元 Szemerédi の定理, 再掲)

$S \subset \mathbb{Z}^n$ を有限部分集合とする． $A \subset \mathbb{Z}^n$: 密 $\Rightarrow$ S-星座 $\subset A$.

$S = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ の場合で多次元 Szemerédi の定理を証明してみる．

Theorem (三角形除去補題 (TRL))

$H = (V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup V_3, E)$ を *tripartite* グラフとする．
$\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma > 0$ *s.t.* もし

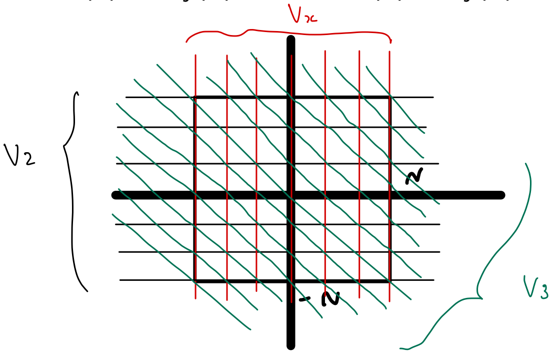
$$H \text{ の三角形の数} \leq \gamma |V_1||V_2||V_3|$$

ならば，各 $i \neq j$ に対して高々 $\varepsilon |V_i||V_j|$ 本の辺を取り除いて三角形を全て無くせる．

密な $A \subset \mathbb{Z}^2$ を固定する．
$\exists \delta > 0$ s.t. $\exists$ いくらでも大きい $N \in \mathbb{N}$ s.t. $|A \cap [-N, N]^2| > \delta N^2$.

$$V_1 := \{H_1(a) := \{(x, y) : x = a\} : a \in [-N, N]\}.$$
$$V_2 := \{H_1(a) := \{(x, y) : y = a\} : a \in [-N, N]\}.$$
$$V_3 := \{H_1(a) := \{(x, y) : x + y = a\} : a \in [-2N, 2N]\}.$$

辺を定める：$H_i(a) \sim H_j(b) :\iff H_i(a) \cap H_j(b) \in A$.
(図)



自明な三角形しかないとする．
$\varepsilon := \delta/75$ として，TRL を適用する．N は十分大きくとれるので

H の三角形の数 $\leq (2N+1)^2 \leq \gamma(2N+1)^2(5N+1) = \gamma|V_1||V_2||V_3|$

であり，高々

$$\varepsilon(|V_1||V_2| + |V_2||V_3| + |V_3||V_1|) \leq 75N^2 \cdot \frac{\delta}{75} = \delta N^2$$

の辺を取り除くと三角形が全てなくなる．しかし， 各辺はある 1 つの三角形に含まれるので

$$|A \cap [-N, N]^2| > \delta N^2$$

本の辺を取り除かないといけない．矛盾．